I. Prolongement par continuité.—

► Lorsqu'une application f est définie sur un intervalle $]a,b]$, on peut chercher à la prolonger sur $[a,b]$: il suffit pour cela de définir $f(a)$.

► *A priori,* la valeur de $f(a)$ peut être choisie arbitrairement. Mais si l'application f est continue sur $]a,b]$, il serait intéressant que le prolongement de f soit lui aussi continu sur $[a,b]$. Pour cela, il faut que f tende vers une limite finie au voisinage droit de a et que

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x).$$

Réciproquement, si f est continue sur $]a,b]$, si elle admet une limite finie au voisinage droit de a et si on prolonge f en posant

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$$

alors le prolongement est continu sur $[a,b]$.

► Si l'application f est définie sur $[a,b]$ tout entier, il serait absurde de la prolonger ! En revanche, si elle est définie par morceaux (avec une expression générale valable pour $a < x \leqslant b$ et une valeur particulière pour $x = a$), il faut bien entendu se poser la question de la continuité de f au point a.

Comme précédemment, l'application f est continue au point a si, et seulement si,

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x).$$

► En pratique, il suffit donc de vérifier que $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage droit de $x = a$ (c'est-à-dire pour $x > a$ proche de a).

II. Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$.—

► On considère maintenant une application f continue sur le segment $[a,b]$ en supposant qu'elle a été définie par morceaux.

Deux questions naturelles se posent :

– L'application f est-elle dérivable au point a ?

– Si f est dérivable sur le segment $[a,b]$ tout entier, sa dérivée est-elle continue au point a ?

► Il est très important de comprendre que les seules réponses possibles ici sont *oui* et *non* !

En aucun cas, il n'est possible de prolonger la dérivée f'. Un tel prolongement n'aurait aucun sens !

Si f est dérivable au point $x = a$, alors $f'(a)$ est défini (le graphe de f admet une tangente en ce point) et on ne peut pas prolonger une application qui est déjà définie...

Si f n'est pas dérivable au point $x = a$, alors la dérivée n'est pas définie en $x = a$, on n'y peut rien (le graphe de f n'a pas de tangente en ce point ou peut-être une tangente verticale) et si on prolonge f', alors ce prolongement ne sera plus la dérivée de f !

► L'application f étant continue au point a, on sait qu'elle est dérivable au point a si, et seulement si, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage droit de $x = a$.

Autrement dit, il suffit de préciser un peu le développement limité de f calculé au **I.**

► Lorsque l'application f est continue sur le segment $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ au moins sur l'intervalle $]a,b]$, on sait (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$) que f est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ si, et seulement si, sa dérivée admet une limite finie à droite en $x = a$.

Dans ce cas,

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f'(x).$$

En pratique, il faut donc calculer l'expression de $f'(x)$ pour $x > a$ et vérifier ensuite (en général par un développement limité) que cette expression admet une limite finie lorsque x tend vers a.

III. EXEMPLES.—

❧ La fonction $f \ : \ [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et par

$$\forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et en particulier $f'(0) = -1/2$.

❧ La fonction $f \ : \ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$$

admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}_+$. Comment ce prolongement est-il défini ? Ce prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$?

❧ Soient P, une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{R}$, une racine double de P.
La fonction f définie sur un voisinage V_a de a par

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad \forall\, x \in V_a \setminus \{a\}, \quad f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V_a et $f'(a) = 1/2$.

❧ La fonction $f \ : \ ]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et par

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1 + x)}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et $f'(0) = -3/2$.

❧ La fonction $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} 1/2 & \text{pour } x \leqslant 0, \\ \frac{1+x^2}{2} & \text{pour } 0 < x < 1, \\ x & \text{pour } x \geqslant 1. \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

❧ La fonction f définie par

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad f(x) = \frac{x \,\ell\text{n}\, x}{x - 1}$$

admet-elle un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$?

❧ Pour quelle valeur de α, la fonction $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = \alpha$ et

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dans ce cas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

❧ L'application f définie par

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

admet-elle un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

❧ L'application f définie par

$$\forall\, x \in \,]0, 1]\,, \quad f(x) = \frac{1 + x - x \,\ell\text{n}\, x}{(1 + x)^2}$$

admet un prolongement continu sur $[0, 1]$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$?