Autres écoles MP - 1129

1. Notons d, le degré du polynôme P en supposant que $d \geqslant 2$.

✍ *Si $d = 1$, le polynôme dérivé est constant et je ne sais pas trop ce que peut être un polynôme constant "scindé à racines simples".*
Si $d = 0$, alors le polynôme dérivé est le polynôme nul...
Bref, supposons $d \geqslant 2$ pour éviter les discussions oiseuses !

Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, il admet d racines réelles deux à deux distinctes et comme chaque partie **finie** peut être énumérée dans l'ordre croissant, on peut noter

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_d$$

les racines de P.

✍ *Une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}$ peut être énumérée (par définition !). Certaines peuvent être énumérées dans l'ordre croissant, c'est le cas de $\mathbb{N}$. En revanche, d'autres ne peuvent être énumérées dans l'ordre croissant : c'est le cas de $\mathbb{Z}$ (qui n'a pas de plus petit élément), mais c'est aussi le cas de $\mathbb{Q}_+$ (qui a bien un plus petit élément).*

❧ Pour tout entier $1 \leqslant k < d$, la fonction polynomiale associée à P est continue sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ et prend la même valeur en a_k et a_{k+1} :

$$P(a_k) = P(a_{k+1}) = 0.$$

D'après le Théorème de Rolle, il existe donc un réel

$$b_k \in]a_k, a_{k+1}[$$

tel que $P'(b_k) = 0$.
❧ Les racines de P et les racines de P' que nous venons de trouver sont entrelacées :

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < a_{d-1} < b_{d-1} < a_d$$

et comme toutes ces inégalités sont strictes, on a ainsi démontré que P', polynôme de degré $(d-1)$, admet au moins $(d-1)$ racines réelles deux à deux distinctes.

Comme un polynôme de degré $(d-1) \geqslant 1$ (polynôme non nul par conséquent !) admet au plus $(d-1)$ racines distinctes, cela prouve que P' est également un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

2. D'après les **relations entre coefficients et racines pour les polynômes scindés**, si le polynôme P s'écrit sous forme développée

$$P = c_d X^d + c_{d-1} X^{d-1} + \cdots + c_0,$$

alors la somme des racines de P est égale à

$$\frac{-c_{d-1}}{c_d}$$

et la moyenne arithmétique de ses racines est donc égale à

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{-c_{d-1}}{c_d}.$$

Le polynôme dérivé P', qui est lui aussi scindé comme on vient de le voir, s'écrit alors sous forme développée

$$P' = dc_d X^{-1} + (d-1)c_{d-1} X^{d-2} + \cdots + c_1$$

ce qui prouve que la moyenne arithmétique des racines de P' est égale à

$$\frac{1}{d-1} \cdot \frac{-(d-1)c_{d-1}}{dc_d} = \frac{-c_{d-1}}{dc_d}.$$

Par conséquent, si P est scindé à racines simples, alors les moyennes arithmétiques des racines de P et de P' sont égales !

✍ *Cette dernière propriété est vraie pour* tous *les polynômes complexes de degré* $d \geqslant 2$. *Nous n'avons utilisé l'hypothèse* à racines simples *pour* P *que pour démontrer que* P' *était lui aussi scindé.*

Mais dans $\mathbb{C}[X]$, *quel que soit* P *de degré* $d \geqslant 2$, *les deux polynômes* P *et* P' *sont scindés, que les racines de* P *soient simples ou non !*