On pose $I =]-1, +\infty[$.

1. Pour tout $x > -1$ (fixé),

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$$

et comme la série de Riemann $\sum {}^1\!/\!{}_{n^{3/2}}$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries de terme général positif que la série $\sum f_n(x)$ est (absolument) convergente et donc que la somme $S(x)$ est bien définie.

2. Chaque fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in I$,

$$f_n'(x) = \frac{-(3n+3x+1)}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)^2}$$

et donc

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n+x)^{3/2}(n+x+1)}.$$

En particulier,

$$\forall \boxed{n \geqslant 2,} \forall\, x \in I, \quad \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{3}{2(n-1)^{3/2}n}$$

ce qui prouve que la série des dérivées $\sum_{n\geqslant 2} f_n'$ converge normalement sur I.

On a ainsi démontré que $S - f_1$ était de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) - f_1'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x)$$

et donc que

$$\forall\, x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

✍ *Il me paraît plus simple de séparer f_1 du reste de la série et de produit un argument de convergence normale sur I tout entier que de conserver f_1 avec les autres termes et de démontrer la convergence normale sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ pour tout $a > -1$.*

Bien entendu, pour penser à traiter f_1 séparément, il faut avoir remarqué pourquoi la convergence n'était pas normale au voisinage de -1 (c'est le genre de questions qu'il est toujours bon de se poser).

3. On reprend la même démarche en traitant f_1 à part !

❧ Pour tout $x > -1$,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(-1) = \frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot n}.$$

En sommant ces inégalités (pour $n \geqslant 2$ seulement, pas pour $n \geqslant 1$!), on obtient

$$\forall\, x > -1, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}\cdot n}.$$

Cet encadrement prouve que $S(x) - f_1(x)$ est bornée sur $]-1, +\infty[$ et en particulier que

$$S(x) \underset{x\to-1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1).$$

✍ *On prouve ainsi que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur I et on redémontre à cette occasion que la somme S est continue sur I en tant que somme de f_1, continue sur I, et de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} f_n$, qui est pour sa part continue sur $[-1, +\infty[$.*

❧ Comme la fonction f_1 tend vers $+\infty$ au voisinage de -1, on en déduit que

$$S(x) \underset{x\to -1}{=} f_1(x) + \mathcal{O}(1) = f_1(x) + o\big[f_1(x)\big]$$

donc que

$$S(x) \underset{x\to -1}{\sim} f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}(x+2)}$$

et enfin que

$$S(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

❧ Comme la fonction S est continue sur $]-1, 0]$, cet équivalent prouve que S est intégrable sur $]-1, 0]$ (comparaison à $1/\sqrt{u}$ au voisinage de $u = 0^+$).

4. On a prouvé que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ convergeait normalement sur I et donc en particulier au voisinage de $+\infty$.

Comme f_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ pour tout $n \geqslant 2$, on en déduit que

$$(S - f_1)(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 0.$$

Comme f_1 tend également vers 0 au voisinage de $+\infty$, on en déduit finalement que

$$S(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0.$$

5. Fixons $x \geqslant 1$ (ce n'est pas une restriction, puisque x tend vers $+\infty$).

La fonction φ définie par

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t+x}\,(t+x+1)}$$

est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, une comparaison somme–intégrale (**avec figure correctement légendée !**) donne

$$\int_1^N \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leqslant \int_0^N \varphi(t)\,dt.$$

Or, quels que soient $0 \leqslant a \leqslant N$,

$$\int_a^N \varphi(t)\,dt = \int_{x+a}^{N+x} \frac{du}{\sqrt{u}\,(u+1)}$$

(changement de variable affine $u = t + x$) et donc

$$\int_a^N \varphi(t)\,dt = 2\int_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}} \frac{dv}{v^2+1} = \Big[2\operatorname{Arctan} v\Big]_{\sqrt{x+a}}^{\sqrt{N+x}}$$

(changement de variable $v = \sqrt{u}$).

On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{N\to +\infty} \int_a^N \varphi(t)\,dt &= 2\big[\pi/2 - \operatorname{Arctan}\sqrt{x+a}\big] \\ &= 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\end{aligned}$$

et donc que

$$2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leqslant S(x) \leqslant 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

pour tout $x \geqslant 1$.

Finalement,

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$

ce qui redémontre que S tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et prouve que S n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

✍ *Cette dernière remarque sert à justifier le calcul de l'équivalent — car à quoi peut bien servir un équivalent au voisinage de $+\infty$ à moins qu'on n'étudie l'intégrabilité ?*