Mines Telecom MP - 1151

❧ On rappelle que $u_n \sim v_n$ si, et seulement si, $u_n = v_n + o(v_n)$.

❧ Comme $\alpha > 0$, la fonction $f = [x \mapsto \ell n^\alpha x]$ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. On va donc calculer un équivalent de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ell n^\alpha k = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

par comparaison avec une intégrale.

Pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n - \ell n^\alpha n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) = S_n$$

puisque $f(1) = 0$.

❧ Il nous reste à calculer un équivalent de

$$I_n(\alpha) = \int_1^n \ell n^\alpha t\,dt$$

en fonction de n — le réel α étant fixé. (Ce serait une mauvaise idée d'essayer de calculer cette intégrale !)

Comme d'habitude, on intègre par parties :

$$I_n(\alpha) = \int_1^n 1 \cdot \ell n^\alpha t\,dt = \big[t \cdot \ell n^\alpha t\big]_1^n - \alpha I_n(\alpha - 1)$$

c'est-à-dire

$$I_n(\alpha) + \alpha I_n(\alpha - 1) = n\,\ell n^\alpha n.$$

Or la fonction f est une fonction continue et positive sur $[1, +\infty[$, non intégrable au voisinage de $+\infty$ et

$$\ell n^{\alpha-1} t = \frac{f(t)}{\ell n\, t} \underset{t \to +\infty}{=} o\big(f(t)\big)$$

donc

$$I_n(\alpha - 1) \underset{n \to +\infty}{=} o\big(I_n(\alpha)\big)$$

et par conséquent

$$I_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} n\,\ell n^\alpha n.$$

❧ En conclusion, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} S_n &= I_n(\alpha) + \mathcal{O}(\ell n^\alpha n) \\ &= \big[n\,\ell n^\alpha n + o(n\,\ell n^\alpha n)\big] + \mathcal{O}(\ell n^\alpha n) \\ &\sim n\,\ell n^\alpha n. \end{aligned}$$