# Mines Telecom MP - 1157

La fonction $f$ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = x^a \ln(x + e^{ax})$$

est évidemment continue sur $]0, +\infty[$ et si $a \geqslant 0$, elle est même définie et continue sur $[0, 1[$.

❧ Si $a = 0$, alors $f(x) = \ln(1+x)$ et il est clair que $f$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (elle tend vers $+\infty$).

❧ Si $a > 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln(e^{ax} + x) &= ax + \ln(1 + xe^{-ax}) \\ &= ax + xe^{-ax} + o(xe^{-ax}) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} ax\end{aligned}$$

donc $f(x) \sim ax^{a+1}$ et $f$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ Si $a < 0$, alors

$$\begin{aligned}\ln(x + e^{ax}) &= \ln x + \ln\Big(1 + \frac{e^{ax}}{x}\Big) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x\end{aligned}$$

et donc $f(x) \sim x^a \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, $f$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $a < -1$.

❧ On considère $a < -1$. Pour $x \to 0$, on a aussi

$$\begin{aligned}\ln(x + e^{ax}) &= \ln\big(1 + (a+1)x + \mathcal{O}(x^2)\big) \\ &\underset{x\to0}{\sim} (a+1)x\end{aligned}$$

(puisque $(a+1) \neq 1$) et donc

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} (a+1)x^{a+1}.$$

Donc, sous la condition $a < -1$, la fonction $f$ est intégrable au voisinage de $0$ si, et seulement si, $a + 1 > -1$, c'est-à-dire $a > -2$.

❧ Conclusion : la fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $-2 < a < -1$.