Mines Telecom MP - 1180

❧ Si X et $Y+Z$ ont même loi, elles ont même fonction génératrice. Or

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = \frac{t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6}{6}$$

(loi uniforme sur $\{1,2,\dots,6\}$) et comme Y et Z sont supposées indépendantes,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = G_Y(t)G_Z(t).$$

Il s'agit donc de factoriser G_X en produit de deux fonctions génératrices (et pas seulement en produit de deux polynômes : il faut en outre que les coefficients des deux facteurs soient positifs et que leurs sommes soient égales à 1).

❧ Il est clair que

$$\frac{t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6}{6} = \frac{t(1+t+t^2)(1+t^3)}{2\times 3}.$$

On peut donc poser

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Y(t) = \frac{1+t+t^2}{3}$$

(la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $\{0,1,2\}$) et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \frac{t+t^4}{2}$$

(la variable aléatoire Z suit la loi uniforme sur $\{0,4\}$).

❧ On peut aussi parvenir au résultat de manière arithmético-intuitive : notons R, le reste modulo 3 de $X-1$ et Q, le quotient modulo 3 de $X-1$ de telle sorte que

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad X(\omega)-1 = 3Q(\omega)+R(\omega).$$

On vérifie que R et Q sont indépendantes avant de poser

$$Y = R \qquad \text{et} \qquad Z = 3Q+1.$$

Les deux variables Y et Z sont bien indépendantes (lemme des coalitions) et on a alors

$$X = Y + Z$$

ce qui est beaucoup plus fort que ce qui était demandé (on demandait seulement une égalité en loi, pas une égalité entre fonctions).