CCINP MP - 1137

❧ La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Par conséquent, son polynôme minimal est scindé, à racines (réelles) simples et ses racines sont les valeurs propres de A.

❧ On note comme d'habitude J, la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, de telle sorte que

$$A = J - 2I_3.$$

On sait, c'est la force de l'habitude, que les valeurs propres de J sont 0 et 3, donc les valeurs propres de A sont -2 et 1.

Le polynôme minimal de A est donc

$$P = (X+2)(X-1) = X^2 + X - 2$$

et si on a un peu de temps devant soi, on peut vérifier que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I_3 - A.$$

❧ Comme $P \neq 0$, on peut effectivement diviser par P.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note Q_k et R_k, le quotient et le reste de la division euclidienne de X^k par P :

$$X^k = (X+2)(X-1)Q_k + R_k$$

avec $\deg R_k < \deg P$, donc il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$R_k = a_k X + b_k.$$

En substituant -2 et 1 à X dans la division euclidienne, on obtient

$$\begin{cases} -2a_k + b_k = (-2)^k \\ a_k + b_k = 1^k \end{cases}$$

ce qui nous donne facilement (merci, Cramer !)

$$a_k = \frac{(-2)^k - 1}{-3}, \qquad b_k = \frac{-2 - (-2)^k}{-3}.$$

Comme $P(A)$ est la matrice nulle, on en déduit de ce qui précède que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = a_k A + b_k I_3 = (-2)^k \cdot \frac{I_3 - A}{3} + 1^k \cdot \frac{A + 2I_3}{3}.$$

(On doit prendre quelques secondes pour vérifier que cette expression est correcte au moins pour $k = 0$ et pour $k = 1$.)

❧ Il est clair que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k.X_0.$$

En appliquant la formule précédente, on constate que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_k = X_0.$$

REMARQUE.— Cela ne doit pas être étonnant : le vecteur X_0 est un vecteur propre (célèbre !) de J et donc de A, associé à la valeur propre 1. Par conséquent, ce vecteur est invariant par A et donc par toutes les puissances de A.