CCINP MP - 1172

❧ Il est clair que L_u est linéaire, mais c'est une application de $\mathscr{C}^k$ dans $\mathscr{C}^{k-1}$. Par conséquent, la composée $L_u \circ L_u$ n'est définie que si $k \geqslant 2$.

Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^k$,

$$\begin{aligned}(L_u \circ L_u)(f) &= L_u(f' + u \cdot f)\\ &= (f' + u \cdot f)' + u \cdot (f' + u \cdot f)\\ &= f'' + 2u \cdot f + (u' + u^2) \cdot f.\end{aligned}$$

❧ Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$$

revient à résoudre l'équation

$$L_u \circ L_u(f) = 0$$

avec $u(x) = x$.

Une fonction g appartient au noyau de L_u si, et seulement si, elle est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + xy = 0$$

c'est-à-dire s'il existe une constante réelle A telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = A.e^{-x^2/2}.$$

Une fonction f appartient donc au noyau de $L_u \circ L_u$ si, et seulement si, il existe une constante réelle A telle que f soit solution de

$$y' + xy = A.e^{-x^2/2}.$$

En résolvant cette équation par variation de la constante, on constate que

$$(L_u \circ L_u)(f) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A + Bx)e^{-x^2/2}.$$