CCINP MP - 1164

❧ Pour $x \neq 1$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n} \cdot \frac{3n+2}{3n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|x-1|}{2}.$$

Par conséquent, si $|x-1| < 2$, alors la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et si $|x-1| > 2$, la série diverge grossièrement. Enfin, si $|x-1| = 2$, alors

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{n}{3n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}$$

donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.

L'ensemble de définition de la somme S est donc l'intervalle $]-1, 3[$.

❧ Chaque terme u_n est une fonction continue sur D.

Pour $0 < r < 1$,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [1-2r, 1+2r], \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \frac{n}{3n-1} \cdot r^n$$

puisque $|x-1| < 2r$. Le majorant trouvé est indépendant de x et $\mathcal{O}(r^n)$ avec $0 < r < 1$. On a ainsi démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[1-2r, 1+2r]$. Par conséquent, la somme S est continue sur

$$\bigcup_{0<r<1} [1-2r, 1+2r] =]-1, 3[\,.$$

❧ Si la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $D =]-1, 3[$, alors (Théorème de la double limite)

- d'une part, chaque fonction u_n tendrait vers une limite finie ℓ_n au voisinage de -1 ;
- d'autre part, la série $\sum \ell_n$ convergerait.

S'il est clair que chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de -1 :

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to-1]{} u_n(-1) = \frac{n(-1)^n}{3n-1} = \ell_n,$$

il est tout aussi clair que la série $\sum \ell_n$ est grossièrement divergente.

Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur D.