CCINP MP - 1149

❧ La fonction $f = [x \mapsto xe^{-x}]$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

donc f est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \quad 0 < f(x) \leqslant f(1) = e^{-1}.$$

Comme l'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par f et contient u_0, il contient tous les termes de la suite : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.

❧ Pour tout $x > 0$, on sait que $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$0 < f(x) < x. \tag{1}$$

On déduit de la stricte positivité des u_n que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} = f(u_n) < u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc elle converge.

❧ Comme la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de f. D'après (1), l'unique point fixe de f est $x = 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

❧ Énoncé du théorème de sommation des relations de comparaison : Si la série $\sum v_n$ est une série divergente de terme général (strictement) positif et si $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors la série $\sum u_n$ est divergente et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

(Pour la démonstration, pas complètement évidente, je vous renvoie à votre cours. Résultats analogues avec o et $\mathcal{O}$ à la place de $\sim$.)

❧ Puisque u_n tend vers 0,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n}}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n}-1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

La série $\sum 1$ est une série divergente dont le terme général est strictement positif.

Par comparaison, on en déduit que la série télescopique

$$\sum\Big(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\Big)$$

est divergente et que

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

Comme ${}^1/_{u_0}$ est une constante, on en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$