TPE MP - 1176

❧ La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'au point $M_0 = (1,1)$ de $K = [0,1]^2$. Par conséquent, f est continue au moins sur $K \setminus \{M_0\}$.

Il reste à étudier la continuité de f au point M_0 (relativement à K). On pose donc

$$(x,y) = (1-h, 1-k)$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\big|f(1-h,1-k) - f(1,1)\big| &= \big|f(1-h,1-k)\big| \\ &= \left|\frac{(1-h)(1-k)hk}{h+k-hk}\right| \\ &\leqslant \frac{|h|\cdot|k|}{|h+k-hk|}.\end{aligned}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\frac{|h|\cdot|k|}{|h+k-hk|} &= \frac{r^2|\cos\theta|\,|\sin\theta|}{r|\cos\theta+\sin\theta - r\sin\theta\cos\theta|} \\ &\leqslant \frac{r}{|\cos\theta+\sin\theta-r\sin\theta\cos\theta|}.\end{aligned}$$

Comme nous nous restreignons à K, les coordonnées h et k sont positives, donc l'angle θ est compris entre 0 et $\pi/2$. Donc

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\Big(\theta - \frac{\pi}{4}\Big) \geqslant 1$$

et par conséquent, en supposant que $0 < r < 1$,

$$\cos\theta + \sin\theta - r\sin\theta\cos\theta \geqslant 1 - r > 0.$$

Donc

$$\big|f(1-h,1-k) - f(1,1)\big| \leqslant \frac{r}{1-r}$$

et le majorant tend vers 0 lorsque r tend vers 0, ce qui prouve que f est continue également au point $M_0 = (1,1)$.

❧ La fonction f est donc continue sur le compact $K = [0,1] \times [0,1]$ (un segment est compact; un produit de deux compacts est compact). Elle atteint donc un maximum et un minimum. Mais où ?

Il est clair que f est identiquement nulle sur le bord du carré K (où $x = 0$, ou $x = 1$, ou $y = 0$, ou $y = 1$: il y a toujours un facteur nul) et qu'elle est toujours positive (tous les facteurs sont positifs). Le minimum de f est égal à 0, atteint en chaque point du bord.

Par conséquent, f atteint son maximum en un point de l'intérieur de K, c'est-à-dire en un point de l'ouvert

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[$$

et comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet ouvert (en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas), elle atteint son maximum en un point critique.

On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(1-x)(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}$$

(on notera que la symétrie de f se retrouve dans les dérivées partielles).

Comme on est sur l'ouvert Ω, les deux dérivées partielles sont nulles si, et seulement si,

$$1 - 2x + x^2y = 1 - 2y + xy^2 = 0.$$

En multipliant la première expression par y et la seconde par x, on en déduit que $x = y$, ce qui nous donne

$$1 - 2x + x^3 = 0.$$

Comme 1 est une solution "évidente" de cette équation, on en déduit que les solutions sont

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$$

et comme on cherche un point de l'ouvert Ω, on en déduit que f admet pour seul point critique le point

$$M_1 = \Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big).$$

Le maximum de f est donc $f(M_1)$; il est atteint au point M_1 et seulement en ce point ; ce maximum vaut

$$\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}.$$