CCINP MP - 1171

❧ Le système différentiel s'écrit aussi

$$X_t' = AX_t$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque (*on doit remarquer !*) que la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable, que son rang est égal à 1 et donc que son polynôme minimal est de la forme

$$X(X-a) = X^2 - aX.$$

On calcule et on constate que $A^2 = 6A$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad A^n = 6^{n-1}A.$$

(Cette égalité est évidemment fausse pour $n = 0$.)

❧ Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = I_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = I_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(6t)^n}{n!} \cdot \frac{A}{6}$$

c'est-à-dire

$$\exp(tA) = I_3 + \frac{e^{6t}-1}{6} \cdot A$$

ou encore (en faisant apparaître les projecteurs spectraux)

$$\exp(tA) = e^{6t} \cdot \frac{A}{6} + e^{0t} \cdot \Big(I_3 - \frac{A}{6}\Big).$$

❧ Le cours nous dit alors que la solution du système différentiel telle que $X(t=0) = X_0$ est donnée par

$$\exp(tA).X_0 = X_0 + \frac{e^{6t}-1}{6} \cdot AX_0.$$