IMT MP - 1168

❧ Le cours nous donne le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$. On en déduit que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad (1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdots \frac{-(2n-1)}{2}}{n!} \cdot (-x)^n$$

et donc que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

❧ La formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$$

nous donne alors

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

❧ On conjecture alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Une manière de justifier cette propriété serait de considérer la différence

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\pi}a_n\right)}_{=b_n} x^n$$

et d'estimer l'expression b_n pour démontrer que $g(x)$ reste bornée au voisinage de $x = 1$.

Si, par exemple, la série $\sum b_n$ est absolument convergente, alors la fonction g est la somme d'une série entière qui converge normalement sur $[0, 1]$, donc g est bornée sur $[0, 1]$, ce qui nous donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x\to1}{=} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \mathcal{O}(1)$$

et le résultat en découle.

Malheureusement, pour estimer l'ordre de grandeur de b_n, il faudrait connaître une version renforcée de la Formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

qui n'est pas au programme (et pas évidente à démontrer).

❧ Cela dit, la série

$$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

est une série de terme général positif et ce terme général est décroissant en fonction de n pour tout $0 \leqslant x < 1$. Les conditions sont remplies pour comparer cette somme à une intégrale !

Pour tout $0 < x < 1$, on obtient classiquement

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{t\,\ell n\, x}}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant x + \int_1^{+\infty} \frac{e^{t\,\ell n\, x}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

On effectue le changement de variable affine

$$u = t|\ell n\, x|$$

qui nous donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{t\,\ell n\, x}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{|\ell n\, x|}} \int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.$$

Quand x tend vers 1, $\ell n\, x$ tend vers 0 et par conséquent

$$\lim_{x\to 1} \int_{|\ell n\, x|}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} u^{(1/2)-1} e^{-u}\,du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit que

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\ell n\, x|}}$$

et le développement limité classique de ℓn au voisinage de 1 nous dit que

$$\sqrt{|\ell n\, x|} \sim \sqrt{1-x},$$

ce qui démontre notre conjecture.