CCINP MP - 1136

❧ On sait que la transposition

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est une symétrie ($T \circ T = \mathrm{Id}$) et, de ce fait, diagonalisable.

Par conséquent, l'endomorphisme

$$f = \mathrm{Id} + 2T$$

est diagonalisable (c'est un polynôme en T) ; pour toute valeur propre λ de T, $1 + 2\lambda$ est une valeur propre de f et si M est un vecteur propre de T associé à λ, alors M est aussi un vecteur propre de f associé à $1 + 2\lambda$.

Puisque T est une symétrie, ses valeurs propres sont ± 1 ; le sous-espace propre associé à $+1$ est le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ; le sous-espace propre associé à -1 est le sous-espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

Ainsi, les valeurs propres de f sont 3 et -1 ; le sous-espace propre associé à 3 est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et le sous-espace propre associé à -1 est $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

❧ Comme f est diagonalisable, on peut exprimer sa trace et son déterminant en fonction des valeurs propres et de la dimension des sous-espaces propres :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} f &= 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 2, \\ \det f &= 3^{n(n+1)/2} . (-1)^{n(n-1)/2}. \end{aligned}$$