IMT PSI - 1195

✍ *On considère trois suites u, v et w telles que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &= 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} &= 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}.$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

1. Il est clair que le problème posé peut s'écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

en posant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On aura donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n X_0$$

et il s'agit essentiellement de calculer A^n.

2. On calcule le polynôme caractéristique de A pour trouver ses valeurs propres.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4-X & -3 & -3 \\ 3 & -2-X & -3 \\ 3 & -3 & -2-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4-X & -3 & 0 \\ 3 & -2-X & X-1 \\ 3 & -3 & 1-X \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} 4-X & -3 & 0 \\ 3 & -2-X & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (X-1) \begin{vmatrix} 4-X & -3 & 0 \\ 6 & -5-X & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\
& \qquad\qquad\qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3) \\
&= -(X-1)(X^2 + X - 2).
\end{aligned}$$

On en déduit que le polynôme caractéristique de A est égal à

$$(X-1)^2(X+2).$$

❧ Comme

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

il est clair que le sous-espace propre associé à 1 est un plan, le plan d'équation

$$[x - y - z = 0]$$

en l'occurence.

✍ *On peut alors affirmer sans calcul supplémentaire que la matrice A est bien diagonalisable.*

❧ Comme

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

le sous-espace propre associé à -2 est la droite dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

❧ La matrice A est donc semblable à $\mathrm{Diag}(1,1,-2)$.

3. D'après les calculs précédents, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a une matrice inversible :

– Les deux premières colonnes sont des vecteurs propres associés à 1 et comme ils ne sont pas proportionnels, ils constituent une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.
– La dernière colonne est un vecteur propre associé à -2.
– Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, ces trois colonnes forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Cette matrice inversible vérifie

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,1,-2)$$

puisque ses colonnes sont des vecteurs propres respectivement associés à 1, 1 et -2.

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = P\,\mathrm{Diag}\big(1,1,(-2)^n\big)P^{-1}.$$

4. Une méthode astucieuse consiste alors à remarquer que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1,1,-2) = I_3 - 3\,\mathrm{Diag}(0,0,1)$$

et donc que

$$P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1} = \frac{1}{3}(I_3 - A).$$

On poursuit la remarque astucieuse avec

$$A^n = I_3 + \big[(-2)^n - 1\big]P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1}$$

ce qui nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-2)^n\frac{I_3 - A}{3} + \frac{2I_3 + A}{3}.$$

✍ *On peut vérifier que les matrices*

$$\frac{I_3 - A}{3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \frac{2I_3 + A}{3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont les matrices de projection associées à la décomposition en somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_3).$$

En particulier,

$$\frac{I_3 - A}{3} + \frac{2I_3 + A}{3} = I_3 \quad \textit{et} \quad (-2)\cdot\frac{I_3 - A}{3} + 1\cdot\frac{2I_3 + A}{3} = A$$

(ce qui correspond aux cas $n = 0$ et $n = 1$).