CCINP MP - 1193

❧ On note $E_1, \ldots, E_n$, les vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On sait que, pour le produit scalaire canonique, cette base est orthonormée :

$$\forall\, 1 \leqslant j,k \leqslant n, \quad {}^t E_j E_k = \delta_{j,k}.$$

On vérifie facilement que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad E_{i,j} = E_i {}^t E_j.$$

Par conséquent,

$$E_{i,j} E_{k,\ell} = E_i \underbrace{{}^t E_j E_k}_{\in \mathbb{R}} {}^t E_\ell = \delta_{j,k} {}^t E_i E_\ell = \delta_{j,k} E_{i,\ell}.$$

❧ Par hypothèse sur f, quels que soient les indices i, j, k et ℓ,

$$f(E_{i,j} E_{k,\ell}) = f(E_{k,\ell} E_{i,j}).$$

D'après le calcul précédent, et par linéarité de f,

$$\delta_{j,k} f(E_{i,\ell}) = \delta_{i,\ell} f(E_{k,j}).$$

En particulier, avec $j = k$,

$$\forall\, 1 \leqslant i,\ell \leqslant n, \quad f(E_{i,\ell}) = \delta_{i,\ell} f(E_{j,j}).$$

On distingue alors deux cas :
– Si $i \neq \ell$, alors $f(E_{i,\ell}) = 0$;
– Si $i = \ell$, alors $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$.

Par linéarité de f,

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} f(E_{1,1}).$$

Autrement dit, la forme linéaire f est proportionnelle à la trace :

$$f = f(E_{1,1}) \cdot \mathrm{tr}\,.$$

❧ Par hypothèse sur g, la forme linéaire $f = \mathrm{tr} \circ g$ vérifie bien

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(AB) = f(BA).$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A) = \alpha \cdot \mathrm{tr}(A).$$

En particulier pour $A = I_n$,

$$f(I_n) = \mathrm{tr}\big[g(I_n)\big] = \mathrm{tr}\, I_n = n \neq 0$$

donc le facteur de proportionnalité α est égal à 1. On a bien démontré que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\big(g(A)\big) = \mathrm{tr}\, A$$

c'est-à-dire que g conserve la trace.