❧ Il est clair que l'application

$$[(x,y) \mapsto \langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle]$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Appliquons le Théorème spectral à l'endomorphisme f, qui est supposé symétrique : il existe une base orthonormée

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

de E constituée de vecteurs propres pour f.

Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \varepsilon_k.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

En notant α_k la valeur propre de f associée au vecteur propre ε_k, on a aussi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \cdot \varepsilon_k$$

et comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée (bis !),

$$\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_k}_{>0} \underbrace{x_k^2}_{\geqslant 0}.$$

Il est maintenant clair que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle \geqslant 0.$$

Si une somme de termes positifs est nulle, c'est que tous ses termes sont nuls. Comme les α_k sont strictement positifs, si $\langle\, f(x) \,|\, x \,\rangle = 0$, c'est que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x_k = 0$$

et donc que $x = x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n = 0_E$.

Donc $[(x,y) \mapsto \langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle]$ est bien un produit scalaire.

❧ Soit $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Comme les α_k sont strictement positifs, il existe un unique endomorphisme g de E tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$$

et les valeurs propres $\sqrt{\alpha_k}$ de cet endomorphisme g sont strictement positives elles aussi.

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique (réelle) et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, donc l'endomorphisme g est bien symétrique.

Enfin,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

donc $g^2 = f$.