CCINP MP - 1139

❧ On doit penser à décomposer la matrice :

$$A = aI_3 + B \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc diagonalisable si, et seulement si, la matrice B l'est.

On vérifie sans peine que

$$B^2 = bc \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad B^3 = bc \cdot B.$$

Par conséquent,

$$X(X^2 - bc)$$

est un polynôme annulateur de B.

▷ Si $b = c = 0$, la matrice B est diagonale !

▷ Si b ou c est nul (mais pas les deux), la matrice B est nilpotente d'indice 2 et par conséquent pas diagonalisable.

▷ Si $b > 0$ et $c > 0$ (puisque ces réels sont supposés positifs), alors $X(X^2 - bc)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et B est donc diagonalisable.

❧ Si $c = 0$ et $b > 0$, alors $B^2 = 0_3$, donc

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} = I_3 + B.$$

Comme aI_3 et B commutent, on sait que

$$\exp(A) = \exp(aI_3).\exp(B) = e^a \cdot \exp(B) = e^a(I_3 + B)$$

c'est-à-dire

$$\exp(A) = e^a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ Si $bc > 0$, on a vu que $B^3 = (bc) \cdot B$. On en déduit par une récurrence immédiate que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad B^{2n+1} = (bc)^n \cdot B \quad \text{et} \quad B^{2n+2} = (bc)^n \cdot B^2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \exp(B) &= I_3 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bc)^n}{(2n+1)!} \cdot B + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(bc)^n}{(2n+2)!} \cdot B^2 \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{bc}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{bc})^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot B + \frac{1}{bc} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{bc})^{2n}}{(2n)!} \cdot B^2 \\ &= I_3 + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}} \cdot B + \frac{\operatorname{ch}\sqrt{bc} - 1}{bc} \cdot B^2 \end{aligned}$$

et enfin que, comme plus haut,

$$\exp(A) = e^a \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{ch}\sqrt{bc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$