CCINP MP - 1132

❧ Si $\lambda = 0$, le rang de $\mathrm{Id} + \lambda p = \mathrm{Id}$ est égal à $n = \dim E$.
Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\mathrm{Id} + \lambda p = \lambda \cdot \left[p - \left(\frac{-1}{\lambda}\right) \cdot \mathrm{Id}\right].$$

Deux cas se présentent :

– ou bien ${}^{-1}/_{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de p et le rang de $\mathrm{Id} + \lambda p$ est égal à n ;
– ou bien $\alpha = {}^{-1}/_{\lambda}$ est une valeur propre de p et le rang de $\mathrm{Id} + \lambda p$ est égal à $n - \dim \operatorname{Ker}(p - \alpha \mathrm{Id})$.

Comme p est un projecteur, ses valeurs propres sont égales en général à 0 et 1 et on sait bien que

$$\operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im} p.$$

Finalement,

– ou bien $\alpha = -1$ et $\operatorname{rg}(\mathrm{Id} + \lambda p) = n - \operatorname{rg} p$;
– ou bien $\alpha \neq -1$ (éventuellement nul) et $\operatorname{rg}(\mathrm{Id} + \lambda p) = n$.

❧ Les colonnes de B sont toutes proportionnelles à la colonne ${}^tA$, donc son rang est inférieur à 1.

De plus, la ligne A n'est pas nulle, donc la matrice B n'est pas nulle et son rang est strictement positif.

Donc $\operatorname{rg} B = 1$.

Le produit ${}^tAA$ est un scalaire lorsque A est une colonne. Mais ici A est une ligne, donc le produit ${}^tAA$ est une matrice carrée de taille n.

❧ La matrice $B = {}^tAA$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

▷ Son rang est égal à $1 < n$, donc elle admet 0 pour valeur propre.

Si $AX = 0$, alors il est clair que $BX = {}^tA(AX) = 0$. Réciproquement, si $BX = 0$, alors

$$0 = {}^tXBX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2$$

donc $AX = 0$. Le sous-espace propre de B associé à 0 (= son noyau !) est donc l'hyperplan orthogonal à la droite $\mathbb{R} \cdot A$.

▷ Comme B est diagonalisable, elle admet une seconde valeur propre α, non nulle. Par conséquent, le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(B - \alpha \mathrm{Id})$ est contenu dans l'image de B et on a vu en commençant que $\operatorname{Im} B = \mathbb{R} \cdot {}^tA$.

Il nous reste à calculer la valeur propre α :

$$B.{}^tA = {}^tA \underbrace{(A\,{}^tA)}_{\in \mathbb{R}} = (A\,{}^tA) \cdot {}^tA.$$

On vérifie ainsi que la colonne ${}^tA$, qui n'est pas nulle, est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\alpha = A\,{}^tA$.