Autres écoles MP - 1133

1. La matrice A admet $X^3+X = X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme annulateur est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc la matrice A est diagonalisable en tant que matrice complexe :

$$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

où les λ_i appartiennent à $\{0, i, -i\}$ (= l'ensemble des racines du polynôme annulateur).

✍ *Ce polynôme annulateur n'est pas scindé dans* $\mathbb{R}[X]$.

Si la matrice A était diagonalisable en tant que matrice réelle, alors son polynôme minimal serait scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Comme le seul diviseur scindé de ce polynôme est X, cela signifierait que A serait la matrice nulle !

2. Comme $u \neq 0$, le rang de u n'est pas nul. Donc il y a au moins une valeur propre non nulle parmi les λ_k.

Comme A est une matrice *réelle*, ses valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées avec la même multiplicité. Par conséquent, i et $-i$ sont toutes les deux valeurs propres. Leur multiplicité commune ne peut pas être strictement supérieure à 1 (on est en dimension 3 !), donc la matrice A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et son rang est égal à 2.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $x = u(x_0)$ et

$$u(x) = u^2(x_0) = 0_E.$$

Comme $u^3 + u = 0$ et que u est linéaire, on en déduit que

$$x = u(x_0) = -u^3(x_0) = -u(0_E) = 0_E.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$.

D'après le Théorème du rang,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

Par conséquent,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

✍ *On a donné ici une preuve élémentaire qui repose sur le polynôme annulateur connu. Mais le résultat établi est en fait vrai pour tout endomorphisme ayant un polynôme annulateur dont 0 est racine simple !*

Supposons que $P = XP_0$ soit un polynôme annulateur de u et que P_0 ne soit pas divisible par X. Le polynôme P_0 est alors premier à X et (Bézout !) il existe deux polynômes A et B tels que

$$AX + BP_0 = 1.$$

On en déduit que

$$P_0(u) \circ u = 0 \quad \textit{et que} \quad A(u) \circ u + B(u) \circ P_0(u) = \mathrm{Id}.$$

Considérons alors un vecteur $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$: il existe un vecteur x_0 tel que $x = u(x_0)$ et par conséquent

$$\begin{aligned} x = \mathrm{Id}(x) &= A(u)\big[u(x)\big] + B(u)\big[P_0(u) \circ u(x)\big] \\ &= A(u)(0_E) + B(u)(0_E) = 0_E. \end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$ et donc $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ (Théorème du rang).

$\boxed{\textbf{4.}}$ Comme X et X^2+1 sont premiers entre eux et que leur produit est un polynôme annulateur de u, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id}).$$

✍ *Suffit-il d'annoncer que X et X^2+1 sont premiers entre eux ? Ou faut-il prendre la peine d'écrire la relation de Bézout :*

$$(-X).X + (1).(X^2+1) = 1$$

qui justifie ce fait ?

$\boxed{\textbf{5.}}$ Comme $u^3+u=0$, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (u^2+\mathrm{Id})[u(x)] = (u^3+u)(x) = 0_E$$

donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$.

D'après les décompositions en somme directe,

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$$

on a aussi $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$ et par conséquent (inclusion et égalité des dimensions)

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id}).$$

✍ *Il suffit de tracer trois droites dans le plan pour constater qu'on peut avoir*

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

sans que pour autant $G = H$!

$\boxed{\textbf{6.}}$ Considérons un vecteur directeur e_1 de $\operatorname{Ker} u$ (qui est une droite comme on l'a vu).

❧ Considérons un vecteur e_2 non nul dans le plan $\operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$. Si e_2 et $u(e_2)$ étaient colinéaires (en tant que vecteurs de $\mathbb{R}^3$, pas en tant que vecteurs de $\mathbb{C}^3$), alors il existerait un réel λ tel que

$$u(e_2) = \lambda \cdot e_2.$$

On aurait alors $u^2(e_2) = \lambda^2 \cdot e_2$, et comme $\lambda \in \mathbb{R}$, cela contredirait $u^2(e_2) = -e_2$ (puisque $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$).

Par conséquent, $\big(e_2, u(e_2)\big)$ est toujours une famille libre, et donc une base, de $\operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$ (quel que soit le choix du vecteur e_2 dans ce plan).

❧ Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, on en déduit que

$$(e_1, e_2, e_3) = \big(e_1, e_2, u(e_2)\big)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

On observe alors que

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0_E = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ u(e_2) &= e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ u(e_3) &= -e_2 = 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \end{aligned}$$

puisque $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$ (car $e_2 \in \operatorname{Ker}(u^2+\mathrm{Id})$).

Par conséquent, la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est bien

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$