Autres écoles MP - 1135

$\boxed{\textbf{1.}}$ On peut calculer facilement le polynôme caractéristique au moyen d'opérations de pivot judicieuses (et sans passer par une relation de récurrence).

Partant de

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

on effectue d'abord les opérations

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n, \quad L_i \leftarrow L_i - L_1$$

pour obtenir

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & \cdots & b \\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a+\lambda & 0 & \cdots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

avant d'effectuer

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$$

pour parvenir à une matrice triangulaire

$$(-1)^n \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda+(n-1)b & b & & b \\ 0 & a-b-\lambda & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\; 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

qui donne directement

$$\chi_M = (X-a+b)^{n-1}\big(X-a-(n-1)b\big).$$

❧ On en déduit en particulier que

$$\det M(a,b) = (-1)^n \chi_M(0) = (a-b)^{n-1}\big(a+(n-1)b\big).$$

✍ *On n'est pas obligé de calculer le polynôme caractéristique pour trouver le déterminant !*

✍ ***Autre méthode très astucieuse pour calculer le déterminant.***

On commence par considérer

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que f est une fonction affine de x en effectuant les opérations de pivot

$$\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_1$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b+x & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

qu'on développe par la première colonne :

$$f(x) = (a+x) \times M_{1,1} + (b+x) \times \left[\sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} M_{i,1} \right]$$

où les mineurs $M_{i,1}$ ne dépendent pas de x.

Il existe donc deux constantes A et B telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax + B.$$

❧ *Pour $x = -c$, il est clair que*

$$f(c) = Ac + B = (a-c)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire inférieure) et pour $x = -b$, il est tout aussi clair que

$$f(b) = Ab + B = (a-b)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).

❧ *En supposant que $b \neq c$, on déduit des formules de Cramer que*

$$A = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{c-b} \quad \textit{et} \quad B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

En particulier,

$$f(0) = B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

❧ *En tant que fonction de b et c, l'expression $f(x)$ est continue (car polynomiale !) donc*

$$\det M(a,b) = \lim_{c \to b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

On pose alors $c = b + h$ et on conclut par un développement limité :

$$\frac{(a-b)^n}{h} \cdot \left((b+h) - b \left[1 - \frac{h}{a-b} \right]^n \right) \xrightarrow[h \to 0]{} (a-b)^{n-1} \big((a-b) + nb \big).$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ La matrice $M(a,b)$ est symétrique mais ses coefficients a et b sont complexes : on ne peut donc pas conclure directement à l'aide du Théorème spectral !

La matrice $M(0,1)$ est, elle, symétrique réelle donc diagonalisable : il existe une matrice de passage Q telle que

$$Q^{-1} M(0,1) Q$$

soit diagonale.

On en déduit alors que, quels que soient les nombres complexes a et b, la matrice

$$Q^{-1} M(a,b) Q = a \underbrace{Q^{-1} M(1,0) Q}_{I_n} + b \underbrace{Q^{-1} M(0,1) Q}_{\text{diag.}}$$

est diagonale, ce qui prouve que toutes les matrices $M(a,b)$ sont diagonalisables.

✍ *Qu'on puisse ici choisir la matrice de passage dans le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est sans intérêt.*

3. Si $b = 0$, alors $M(a, b) = aI_n$ est une homothétie et son polynôme minimal est donc $(X - a)$.

Si $b \neq 0$, alors $M(a, b)$ n'est pas une homothétie et le degré de son polynôme minimal est donc supérieur à 2.

Il est alors classique de considérer la matrice

$$J = M(1, 1)$$

dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc

$$J^2 = nJ$$

et comme

$$M(a, b) - (a - b)I_n = bJ$$

alors

$$\begin{aligned}[M(a, b) - (a - b)I_n]^2 &= b^2J^2\\ &= nb.(bJ)\\ &= nb.[M(a, b) - (a - b)I_n].\end{aligned}$$

Cela nous montre que le polynôme

$$[X - (a - b)]^2 - nb.[X - (a - b)]$$

est un polynôme annulateur de $M(a, b)$, de degré 2 et unitaire : c'est donc le polynôme minimal de $M(a, b)$.

Conclusion :

$$\mu_M = (X - a + b)\big(X - a - (n - 1)b\big).$$

✍ ***Variante plus élaborée :***

Le polynôme caractéristique de $M(a, b)$ nous donne ses deux valeurs propres (ou sa valeur propre si $b = 0$) et on sait que $M(a, b)$ est diagonalisable. Par conséquent, son polynôme minimal est unitaire, scindé, à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de $M(a, b)$ (c'est-à-dire les racines de χ_M) : cela caractérise le polynôme minimal.

4. Comme $I_n+M(a, b) = M(a+1, b)$, le déterminant de $I_n+M(a, b)$ est égal à

$$(1 + a - b)^{n-1}\big(1 + a + (n - 1)b\big).$$

Variante sur le même thème

5. Démontrer que

$$\mathcal{E} = \{M(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$$

est un espace vectoriel et admet $\big(I = M(1, 0),\ J = M(1, 1)\big)$ pour base.

❧ L'application $\varphi\ :\ \mathbb{K}^2 \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi(a, b) = M(a, b) = aM(1, 0) + bM(0, 1)$$

est évidemment linéaire et $\mathcal{E}$, en tant qu'image d'une application linéaire, est donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

❧ La définition de φ nous dit que $\big(M(1, 0),\ M(0, 1)\big)$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ et comme il est clair que

$$aM(1, 0) + bM(0, 1) = M(a, b) = 0_n \iff a = b = 0$$

cette famille génératrice est en fait une base de $\mathcal{E}$.

L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}^2$ sur $\mathcal{E}$ et en particulier $\dim \mathcal{E} = 2$.

❧ Quels que soient les scalaires α et β,

$$\alpha I + \beta J = M(\alpha + \beta, \beta).$$

Il est clair que

$$\alpha + \beta = \beta = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

et par conséquent la famille (I, J) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que (I, J) est une base de $\mathcal{E}$.

6. Démontrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

Comme $\mathcal{E}$ est engendré par la famille (I, J), il suffit de vérifier que les produits deux à deux des membres de cette famille :

$$I \times I, \quad I \times J, \quad J \times I, \quad J \times J$$

appartiennent bien à $\mathcal{E}$.

Comme I est neutre pour $\times$, il suffit même de vérifier que $J^2 \in \mathcal{E}$.

On vérifie sans peine que $J^2 = nJ \in \mathcal{E}$, ce qui prouve que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.

REMARQUE.— Comme $I \in \mathcal{E}$, on vient en fait de prouver que $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

7. Démontrer que la famille $\left(I, M(a,b), M(a,b)^2\right)$ est liée et exhiber une relation de liaison.

❧ D'après la question précédente, la famille est constituée de trois vecteurs de $\mathcal{E}$, espace vectoriel de dimension 2, donc cette famille est liée.

❧ Sachant que $J^2 = nJ$ et que

$$M(a,b) - (a-b)I = bJ,$$

on obtient

$$\left[M(a,b) - (a-b)I\right]^2 = b^2J^2 = nb^2J = nb.\left[M(a,b) - (a-b)I\right]$$

ce qui nous donne une relation de liaison et par conséquent un polynôme annulateur de $M(a,b)$:

$$[X - (a-b)]^2 - nb.[X - (a-b)] = [X - (a-b)][X - (a-b) - nb].$$

8. En déduire une condition pour que la matrice $M(a,b)$ soit inversible et, le cas échéant, exprimer son inverse.

❧ La relation de liaison qu'on vient de trouver peut s'écrire

$$M(a,b)\left[M(a,b) - [2(a-b) + nb]I_n\right] = -(a-b)(a-b+nb)I_n.$$

Par conséquent, si $a \neq b$ et si $a \neq (n-1)b$, alors la matrice $M(a,b)$ est inversible et son inverse est la matrice

$$\frac{-1}{(a-b)(a-b+nb)} \cdot \left[M(a,b) - [2(a-b)+nb]I_n\right].$$

✍ *En revanche, si $a = b$ ou si $a = (n-1)b$, on ne peut exploiter la relation de liaison... Il faut faire intervenir le polynôme minimal pour conclure !*

❧ Le polynôme minimal de $M(a,b)$ est un diviseur unitaire du polynôme annulateur trouvé.

Si le polynôme minimal de $M(a,b)$ est un polynôme de degré 1, alors $M(a,b)$ est une homothétie ($b = 0$) de rapport a et $M(a,0)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$, d'inverse $M(1/a, 0) \in \mathcal{E}$.

Sinon, le polynôme minimal de $M(a,b)$ est égal à

$$[X - (a-b)][X - (a-b) - nb]$$

et la matrice $M(a,b)$ est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une racine du polynôme minimal, c'est-à-dire si $a \neq b$ et $a \neq (n-1)b$ et dans ce cas, l'expression de l'inverse de $M(a,b)$ a déjà été donnée.