Autres écoles MP - 1147

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction
$$[t \mapsto f(t)t^n]$$
est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale
$$\int_0^1 f(t)t^n \, dt$$
est bien définie.

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y reste bornée et
$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \; \forall \, t \in [0, 1], \quad \left| f(t)t^n \right| \leqslant \|f\|_\infty.$$
Par positivité de l'intégrale, on en déduit que
$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right| \leqslant \int_0^1 \left| f(t)t^n \right| dt \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'ensemble
$$\left\{ \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right|, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$
est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$: elle admet bien une borne supérieure et cette borne supérieure est un réel positif.

Ainsi, N est bien une application de $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

✍ *Faut-il prendre la peine de justifier pourquoi l'ensemble considéré n'est pas vide ?*

On a justifié l'existence de chaque intégrale, donc cet ensemble contient tous les termes d'une suite réelle (pas nécessairement distincts deux à deux, mais c'est sans importance).

Je ne pense pas qu'il faille en dire plus.

En revanche, il est crucial de justifier l'existence de chaque intégrale, de justifier clairement que l'ensemble est borné et de mentionner (juste mentionner, en passant) qu'il n'est pas vide.

▶ Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que
$$\left| \int_0^1 (\lambda f)(t)t^n \, dt \right| = \underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0} \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right|$$
et par conséquent
$$N(\lambda f) = |\lambda| \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right|, \; n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda| \, N(f).$$

✍ *Là encore, inutile d'entrer dans les détails (à mon avis).*

Mais un jour d'oral, on doit se tenir prêt à fournir les détails nécessaires pour justifier que, pour toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$,
$$\forall \, t > 0, \quad \sup(t.A) = t. \sup(A).$$
(Rien de compliqué, mais ça prend pas mal de temps de bien le rédiger.)

▶ Quelle que soient les fonctions f et g dans E, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 (f+g)(t)t^n \, dt \right| &= \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt + \int_0^1 g(t)t^n \, dt \right| \\
&\leqslant \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right| + \left| \int_0^1 g(t)t^n \, dt \right| \\
&\leqslant N(f) + N(g)
\end{aligned}$$

(en invoquant successivement la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et le fait que la borne sup est un majorant).

On a trouvé un majorant indépendant de n, on peut donc passer au sup :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 (f+g)(t)t^n \,dt \right| \leqslant N(f)+N(g)$$

ce qui signifie précisément que N vérifie aussi l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, f, g \in E, \quad N(f+g) \leqslant N(f)+N(g).$$

✍ *Je tiens à ce style de démonstration avec les bornes sup (ou inf) : on commence par trouver un majorant et on conclut en rappelant que, par définition, la borne sup est le plus petit de tous les majorants possibles. — C'est peut-être une manie personnelle ?*

► Il reste à vérifier que N sépare les points. Pour cela, nous considérons $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 f(t)t^n \,dt = 0.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\int_0^1 f(t)P(t)\,dt = 0$$

pour toute application polynomiale $P \in E$.

❧ La fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[0, 1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

❧ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est bornée sur $[0, 1]$,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad \left|f^2(t)-f(t)P_n(t)\right| = |f(t)|\left|f(t)-P_n(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty.$$

Par linéarité, par inégalité triangulaire et enfin par positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f^2(t)\,dt - \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt \right| &= \left| \int_0^1 f^2(t) - f(t)P_n(t)\,dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f^2(t) - f(t)P_n(t)\right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty.\end{aligned}$$

❧ On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt.$$

Or on a constaté en commençant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

et comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, on en déduit que f est la fonction nulle.

✍ *On peut vérifier facilement que l'application*

$$\left[(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right]$$

définit un produit scalaire sur E. *Le raisonnement qui précède démontre que l'orthogonal du sous-espace* F *des applications polynomiales est réduit à* $\{0\}$ *et donc que*

$$F^\perp = E^\perp = \{0\} \quad \textit{bien que} \quad F \subsetneq E.$$

On en déduit en particulier que $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Cela n'est possible que parce que E *est un espace de dimension infinie et que* F *est dense dans* E.

Rappel : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé (donc $\overline{F} = F$*) et* $(F^\perp)^\perp = F$.