► Par définition de F, pour toute fonction $f \in F$, il existe un NOMBRE FINI de scalaires complexes

$$a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

(où les λ_p sont DEUX À DEUX DISTINCTS) tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p e^{\lambda_p x}.$$

Il est alors clair que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k.$$

Toute famille FINIE de nombres réels positifs admet un plus grand élément : en posant

$$a_0 = \sum_{p=1}^{n} |a_p| \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

on obtient

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(k)}(0)\right| \leqslant a_0 \lambda_0^k$$

et on en déduit que la série

$$\sum \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}$$

est bien convergente (comparaison à une série de Poisson).

Par conséquent, N est bien une application de F dans $\mathbb{R}_+$.

► L'homogénéité est évidente (linéarité de la somme pour les séries convergentes).

► L'inégalité triangulaire est facile à établir. Quelles que soient les applications f et g dans F,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|(f+g)^{(k)}(0)\right| \leqslant \left|f^{(k)}(0)\right| + \left|g^{(k)}(0)\right|$$

(inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$) et par positivité de la somme (pour les séries convergentes)

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

► Il reste à vérifier que N sépare les points.

Supposons donc que $N(f) = 0$ pour une certaine application $f \in F$. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

(une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul) et donc que (en conservant les notations précédentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0.$$

Comme les λ_p sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde

$$V = \left(\lambda_p^k\right)_{\substack{0 \leqslant k < n \\ 1 \leqslant p \leqslant n}}$$

est inversible, donc les a_p vérifient le système de Cramer homogène

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0$$

ce qui prouve que les a_p sont tous nuls et donc que f est le vecteur nul.

✍ *Non, la matrice de Vandermonde n'est pas au programme. En théorie, il faudrait justifier en détail le fait qu'elle est inversible si, et seulement si, les λ_p sont deux à deux distincts.*

Mais la matrice de Vandermonde est un grand classique *et, à ce titre, on a le droit d'y faire allusion sans trop entrer dans les détails — surtout quand, comme ici, elle n'est pas introduite par l'énoncé.*

Et d'autre part, la matrice de Vandermonde apparaît dans le cours sur les polynômes interpolateurs de Lagrange qui, eux, sont bien au programme. De ce fait, on peut quand même considérer que la matrice de Vandermonde est au programme !

VARIANTE.— Pour tout λ, la fonction e_λ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, x^n.$$

Par combinaison linéaire, toute fonction $f \in F$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier (Formule de Taylor) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

Comme on l'a vu, si $N(f) = 0$, alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la fonction f est la fonction nulle.

✍ *Cette variante est plus élégante que la méthode précédente... En fait, cette variante ne prouve que ce qu'il faut prouver (la fonction f est la fonction nulle) et rien de plus !*

La méthode précédente au contraire démontrait que f était nulle en démontrant que tous les scalaires a_k étaient nuls au moyen d'un argument (système de Cramer associé à une matrice de Vandermonde) qui permet de démontrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre — ce dont on n'a nul besoin ici.