Autres écoles PC - 1334

✍ *Bien entendu, on doit savoir justifier sans hésitation que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$!*

*Le **rayon spectral** $\rho(A)$ est bien défini : comme A est une matrice à coefficients* complexes*, son spectre n'est pas vide et par conséquent*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

a bien un sens.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc

$$\rho(A) = \max\{1, |e^{i\theta}|\} = 1.$$

D'autre part,

$$\|A\| = \max\{1+0,\ |1+i| + |e^{i\theta}|\} = \sqrt{2} + 1.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ D'après la formule du produit matriciel, si $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}|\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire.

Les indices i et k variant indépendamment l'un de l'autre, on peut permuter les deux opérateurs de sommation.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| \right) |b_{k,j}|$$

✍ *C'est le moment de se rappeler que le maximum (ou la borne supérieure) est en particulier un majorant.*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant \|A\|$$

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}| \leqslant \|B\|$$

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad \sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|\, |b_{k,j}| \leqslant \|A\|\, \|B\|$$

et donc que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

✍ *Comme $\|I_n\| = 1$, il s'agit ici d'une **norme d'algèbre** — concept qui n'est pas au programme...*

3. Soient λ, une valeur propre de A et $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, un vecteur propre de A associé à λ. On pose alors

$$B = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

et (règle du produit matriciel par blocs)

$$AB = \lambda \cdot B.$$

Par conséquent,

$$|\lambda|\,\|B\| = \|\lambda \cdot B\| = \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$

Comme $\|B\| > 0$ (puisque B n'est pas la matrice nulle), on en déduit que

$$\forall\,\lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad |\lambda| \leqslant \|A\|$$

et donc, en passant au maximum, que

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

✍ *Cette inégalité est cohérente avec le cas particulier étudié à la première question.*

4. Comme toute matrice à coefficients complexes, la matrice A est trigonalisable : elle est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A^k est donc semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\mathrm{Sp}(A^k) = \left\{\lambda^k,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$$

et donc

$$\rho(A^k) = \max\left\{|\lambda^k|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\} = [\rho(A)]^k.$$

5. Il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

et donc

$$\forall\,k \in \mathbb{N}^*, \qquad Q^{-1}A^kQ = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

❧ Si $\rho(A) < 1$, alors λ_i^k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ (quel que soit l'indice $1 \leqslant i \leqslant n$). Donc $Q^{-1}A^kQ$ tend vers la matrice nulle (pour la norme produit sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et *donc* pour toute norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$). L'application

$$\left[M \mapsto QMQ^{-1}\right]$$

est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie), donc A^k tend vers $Q0_nQ^{-1} = 0_n$ lorsque k tend vers $+\infty$ (Théorème de composition de limites).

❧ Réciproquement, si A^k tend vers la matrice nulle lorsque k tend vers $+\infty$, alors $Q^{-1}A^kQ$ tend vers la matrice nulle (Théorème de composition de limites, bis !) et donc (définition de la convergence !)

$$\lim_{k \to +\infty} \|Q^{-1}A^kQ\| = 0.$$

Mais, par définition de $\|\cdot\|$,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad \|Q^{-1}A^kQ\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i^k| = [\rho(A)]^k.$$

La raison d'une suite géométrique de limite nulle est strictement inférieure à 1 (en valeur absolue), donc $\rho(A) < 1$.