✍ *Plein d'hypothèses sur la matrice : symétrique réelle (théorème spectral), stochastique (théorème de Perron-Frobenius). On esquive le théorème d'Hadamard à la première question pour mieux le retrouver à l'avant-dernière question !*

1. La propriété

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

peut aussi s'écrire sous la forme

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = 1$$

et être donc interprétée de la manière suivante :

$$AU = U \qquad \text{pour} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur U appartient donc à $\operatorname{Ker}(A - I_n)$.

L'énoncé a admis que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) = \mathbb{R} \cdot U.$$

✍ *Le théorème d'Hadamard (exercice 987) nous indique comment démontrer que* $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$.

Considérons un vecteur $X \neq 0$ dans $\operatorname{Ker}(A - I_n)$. On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = x_i$$

c'est-à-dire

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{i,j} x_j = (1 - a_{i,i}) x_i.$$

Considérons maintenant un indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que

$$|x_{i_0}| = \|X\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| > 0.$$

*Si on devait démontrer que $\|\cdot\|$ était une norme sur $\mathbb{R}^n$, il faudrait justifier l'*existence *de ce maximum. Pour ce qui nous concerne, on se contente d'appliquer la définition du maximum : il existe* au moins *un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \|X\|$.*

On a donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \underbrace{(1 - a_{i_0,i_0})}_{>0} \underbrace{|x_{i_0}|}_{>0} &= \Bigg| \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} a_{i_0,j} x_j \Bigg| \\ &\leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} \underbrace{a_{i_0,j}}_{>0} \underbrace{|x_j|}_{\leqslant |x_{i_0}|} \\ &\leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} a_{i_0,j} \, |x_{i_0}| = (1 - a_{i_0,i_0}) |x_{i_0}|. \end{aligned}$$

En divisant par $|x_{i_0}| = \|X\| > 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
1 - a_{i_0,i_0} &= \left| \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i_0}} a_{i_0,j} \frac{x_j}{\|X\|} \right| \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i_0}} a_{i_0,j} \frac{|x_j|}{\|X\|} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i_0}} a_{i_0,j} = 1 - a_{i_0,i_0}.
\end{aligned}$$

On en déduit d'une part que nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : les $a_{i_0,j}x_j$ sont donc tous de même signe et comme les $a_{i_0,j}$ sont tous strictement positifs, on en déduit que les x_j sont tous de même signe.

On en déduit d'autre part que

$$\forall\, j \neq i_0, \quad a_{i_0,j} \frac{|x_j|}{\|X\|} = a_{i_0,j} > 0$$

et donc que $|x_j| = \|X\|$ pour tout $j \neq i_0$ mais aussi (par définition de i_0 !) pour $j = i_0$.

Bref, les coordonnées de X sont toutes de même signe et égales en valeur absolue, donc le vecteur X est proportionnel à U, ce qui prouve que

$$\mathrm{Ker}(A - I_n) \subset \mathbb{R} \cdot U.$$

2. Les coordonnées de la colonne AX sont

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{>0} |x_j| \leqslant \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)}_{=1} \|X\| = \|X\|$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

On a trouvé un majorant indépendant de i, on peut donc passer au maximum :

$$\|AX\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \|X\|.$$

✍ *Pour arriver à majorer facilement ce genre d'expression, un peu de culture sur les normes est utile.*

L'inégalité de Hölder nous dit que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

avec les normes classiques

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$$

en supposant que les exposants p et q soient conjugués :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Fort bien... Deux cas particuliers de l'inégalité de Hölder sont extrêmement utiles.

– *Si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Schwarz !*
– *Pour $p = 1$ et $q = +\infty$ (qui sont bien conjugués !), on retrouve*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

C'est précisément cette version qu'il fallait utiliser ici (en appliquant la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur les coordonnées de X comme l'énoncé le suggère).

L'inégalité de Hölder est à peu près la seule *manière de majorer une telle expression, il reste à bien choisir les exposants p et q...*

$\boxed{\textbf{3.}}$ Considérons un vecteur propre X associé à la valeur propre λ. On a donc $AX = \lambda X$ et par homogénéité de la norme

$$\|AX\| = |\lambda|\,\|X\|.$$

On a démontré à la question précédente que

$$\|AX\| \leqslant \|X\|.$$

Et comme $\|X\| > 0$, on en déduit que $|\lambda| \leqslant 1$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} b_{i,i} = a_{i,i} + 1 = a_{i,i} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} &= 2a_{i,i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} a_{i,j} \\ &= \underbrace{2a_{i,i}}_{>0} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j} > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Considérons un vecteur $X \in \operatorname{Ker} B$. On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = 0$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad |b_{i,i} x_i| = \left|\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j} x_j\right|.$$

En choisissant un indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad |x_j| \leqslant |x_{i_0}| = \|X\|,$$

on en déduit que

$$b_{i_0,i_0}|x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}|x_j| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}|x_{i_0}|$$

puisque tous les $b_{i,j}$ sont positifs. On arrive alors à

$$\underbrace{\left(b_{i_0,i_0} - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}\right)}_{>0} \underbrace{|x_{i_0}|}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

ce qui prouve que $\|X\| = |x_{i_0}| = 0$ et donc que $X = 0$.

Le noyau de la matrice carrée B étant réduit au vecteur nul, la matrice B est donc inversible.

✍ *Si une matrice n'est pas carrée, il se peut que son noyau soit réduit au vecteur nul mais cette matrice ne peut pas être inversible !*

On aurait pu raisonner par l'absurde en supposant $X \neq 0$ pour arriver à une contradiction, mais ce n'est pas une nécessité.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et en particulier ses valeurs propres sont réelles.

On a vu que 1 était valeur propre de A, que le sous-espace propre associé à 1 était la droite dirigée par le vecteur U.

On a vu que les valeurs propres vérifiaient toutes $|\lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$\lambda \in [-1, 1]$$

(puisque les valeurs propres sont réelles) et enfin que -1 n'était pas valeur propre de A.

Par conséquent, il existe une matrice de passage Q et des réels

$$-1 < \lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_2 < 1$$

tels que

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{Diag}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Donc, pour tout exposant $p \in \mathbb{N}^*$,

$$Q^{-1}A^pQ = \mathrm{Diag}(1, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p).$$

Comme $|\lambda_k| < 1$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$, on en déduit que λ_k^p tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la suite $(Q^{-1}A^pQ)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice

$$\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$$

(pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour n'importe quelle norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

L'application (dite conjugaison)

$$\left[M \mapsto QMQ^{-1}\right]$$

est linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, donc elle est continue. La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente, en tant que composée d'une suite convergente par une application continue (théorème de composition des limites) et

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = Q\,\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)Q^{-1}.$$