Autres écoles PC - 1269

MÉTHODE PHYSICIENNE.—

❧ On remarque l'existence d'une intégrale première simple : comme

$$(y' + z') = 0$$

alors la fonction $y + z$ est constante :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) + z(t) = y_0 + z_0.$$

❧ On en déduit que

$$x'' = y' - z' = 4x + 2(y_0 + z_0).$$

Par conséquent, il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A\,\mathrm{ch}\,2t + B\,\mathrm{sh}\,2t - \frac{y_0 + z_0}{2}.$$

❧ On en déduit alors que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = [A\,\mathrm{sh}\,2t + B\,\mathrm{ch}\,2t - (y_0 + z_0)t] + [(y_0 + z_0)t] + C_y$$

(en intégrant la seconde équation différentielle, connaissant $x(t)$ et la somme $y(t) + z(t)$) et aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = [-A\,\mathrm{sh}\,2t - B\,\mathrm{ch}\,2t + (y_0 + z_0)t] - [(y_0 + t_0)t] + C_z.$$

Finalement, les fonctions x, y et z s'expriment

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\mathrm{ch}\,2t + B\,\mathrm{sh}\,2t - \frac{y_0 + z_0}{2}, \\ y(t) &= A\,\mathrm{sh}\,2t + B\,\mathrm{ch}\,2t + (y_0 - B), \\ z(t) &= -A\,\mathrm{sh}\,2t - B\,\mathrm{ch}\,2t + (z_0 + B). \end{aligned}$$

VERSION MATHÉMATICIENNE.—

La matrice du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X(X-2)(X+2)$. La matrice M est donc diagonalisable et en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient une matrice inversible telle que

$$P^{-1}MP = \mathrm{Diag}(0, 2, -2).$$

Par conséquent, en posant $U_t = P^{-1}X_t$, on est ramené à

$$U_t' = \mathrm{Diag}(0, 2, -2).U_t$$

et il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$U_t = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 e^{2t} \\ K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$X_u = PU_t = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \\ -K_1 + K_2 e^{2t} - K_3 e^{-2t} \\ -K_1 - K_2 e^{2t} + K_3 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

On trouve bien les mêmes solutions, sous une forme un peu différente :

$$K_1 = -\frac{y_0 + z_0}{2}, \quad K_2 = \frac{A + B}{2}, \quad K_3 = \frac{A - B}{2}.$$