Autres écoles PSI - 1246

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Pour $x < 0$, le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (divergence grossière de la série).

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(0)$$

et comme

$$u_n(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et que la série $\sum 1/n^2$ est convergente, la série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$.

La somme f de la série de fonctions est donc définie sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Chaque fonction u_n est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$. On a vu à la question précédente que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc la somme f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Chaque fonction u_n est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Par conséquent, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant n^{k-2} e^{-na}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et comme $a > 0$,

$$\frac{(n+1)^{k-2} e^{-(n+1)a}}{n^{k-2} e^{-na}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a} < 1$$

donc ce majorant est le terme général d'une série convergente (règle de D'Alembert).

On vient donc de démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$, la série des dérivées $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Par conséquent, la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ et comme cela vaut pour tout $a > 0$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

On sait de plus que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^k}{n^2+1} e^{-nx}.$$

(Le terme en $n = 0$ est constant, donc ses dérivées sont nulles).

✍ *Et en 0 ? On sait que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $N \geqslant 1$,*

$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}.$$

Comme la série

$$\sum \frac{-n}{n^2+1}$$

est divergente, pour tout $A > 0$, on peut choisir $N = N(A) \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} \leqslant -A-1.$$

Or la somme

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx}$$

est une expression continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de x (puisqu'il n'y a qu'un nombre FINI *de termes et que chaque terme est continu). En particulier,*

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} < -A$$

donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{-n}{n^2+1} e^{-nx} \leqslant -A.$$

et par conséquent tel que

$$\forall\, 0 < x \leqslant \alpha, \quad f'(x) \leqslant -A.$$

Cela nous montre que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty.$$

Comme f est continue en 0, on peut en déduire que le graphe de f admet une ***tangente verticale*** *au point d'abscisse $x = 0$.*

4. Puisque la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur un voisinage de $+\infty$ et que chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$, le Théorème de la double limite nous assure que la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 1$$

puisque

$$\lim_{x \to +\infty} u_0(x) = 1 \quad \text{et que} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 0.$$

► Pour trouver un équivalent de

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, il suffit de détailler la somme :

$$f(x) = 1 + u_1(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x).$$

Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{e^{-2x}}{n^2+1}$$

et donc que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \leqslant e^{-2x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Cet encadrement nous dit en particulier que

$$f(x) - 1 - \frac{e^{-x}}{2} \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-2x})$$

et donc que

$$f(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2} + o(e^{-x}) \sim \frac{e^{-x}}{2}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

5. La fonction f est positive (somme d'une série de fonctions positives) et décroissante (somme d'une série de fonctions décroissantes, ce qui est confirmé par le fait que la dérivée est la somme d'une série de fonctions négatives).

De plus, la fonction f est convexe sur $]0, +\infty[$, puisqu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est la somme d'une série de fonctions positives.

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, elle est donc en fait convexe sur $[0, +\infty[$ tout entier (par densité).

On a toutes les informations nécessaires pour tracer le graphe de f de manière assez précise...