Autres écoles PSI - 1213

$\boxed{\textbf{1.}}$ La trace est égale à 2 et le déterminant à 3, donc les valeurs propres de A sont -1 et 3.

Comme

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

on pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de A associés à -1 et à 3 respectivement, donc la matrice P est inversible et

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(-1, 3).$$

❧ D'après les formules de Cramer,

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ On généralise les calculs précédents : on pose

$$Q = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans peine que

$$QQ_1 = Q_1Q = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

et donc que Q est inversible avec $Q_1 = Q^{-1}$.

Sans beaucoup plus de difficultés, on vérifie aussi que

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} -A & 0_n \\ 0_n & 3A \end{pmatrix}$$

cqfd.