Autres écoles PSI - 1212

1. Par bilinéarité de la multiplication matricielle

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

l'application f_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si $A^2 = A$, alors

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad (f_A \circ f_A)(M) = A(AM) = A^2M = AM = f_A(M)$$

donc f_A est un projecteur de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. En généralisant le calcul précédent (récurrence + combinaison linéaire), on constate que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad P(f_A)(M) = P(A)M. \tag{1}$$

❧ Si P est un polynôme annulateur de A, alors la relation (1) montre que $P(f_A)$ est l'endomorphisme nul de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et donc que P est aussi un polynôme annulateur de f_A.

❧ Réciproquement, si P est un polynôme annulateur de f_A, alors $P(A)M$ est la matrice nulle quelle que soit la matrice M et en particulier $P(A) = 0_n$ (pour $M = I_n$!). Donc P est aussi un polynôme annulateur de A.

❧ En conclusion, la matrice A et l'endomorphisme f_A ont le même idéal annulateur et par suite, elles ont le même polynôme minimal.

Or une matrice/un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable si, et seulement si, f_A est diagonalisable.

✍ *On aurait pu répondre à cette question en comparant les sous-espaces propres de A aux sous-espaces propres de f_A. Mais pour cela, il aurait fallu traiter les questions suivantes au préalable !*

Pour aborder les questions de cet exercice dans l'ordre où elles sont posées (ce qui est le choix de l'examinateur), il faut donc pouvoir caractériser les matrices/endomorphismes diagonalisables sans connaître leurs valeurs propres et les sous-espaces propres : il ne reste donc que le polynôme minimal !

4. Si $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$, alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} X & X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

n'est pas la matrice nulle et

$$f_A(M) = AM = \begin{pmatrix} AX & AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda M$$

donc M est bien un vecteur propre de f_A associé à λ. Par conséquent, λ est aussi une valeur propre de f_A.

✍ *Plus subtilement, si X^i est un vecteur propre de A associé à λ_i, alors la famille des matrices définies par*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad X^i_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ème colonne}}}{X^i} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

est une famille libre *de vecteurs propres de f_A associés à λ_i.*

5. Réciproquement, si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas la matrice nulle et si $AM = \lambda M$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad AC_j = \lambda C_j$$

et comme l'une des colonnes C_j au moins n'est pas la colonne nulle, on en déduit que λ est aussi une valeur propre de A.

6. D'après les deux dernières questions,

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$$

(par double inclusion).

✍ *Plus précisément, si*

$$(X^1, \dots, X^n)$$

est une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* A*, la famille*

$$(X^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est une famille libre *de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *constituée de* n^2 *vecteurs propres de* f_A *et donc une base de vecteurs propres de* f_A*.*

On pouvait donc démontrer, sans recourir au polynôme minimal, que : si A *est diagonalisable, alors* f_A *est diagonalisable.*

On pourrait aussi établir la réciproque de manière analogue, mais la démonstration est plus embrouillée (il s'agit d'extraire une famille libre de n *colonnes d'une famille libre de* n^2 *matrices).*