Autres écoles PSI - 1208

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme la matrice M est complexe, elle est trigonalisable : il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Q^{-1}M^2Q = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

et comme des matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\mathrm{tr}(M^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots\ 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La question précédente nous suggère de calculer

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \cdots & 2 & n \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ n & 2 & \cdots & 2 & n \end{pmatrix}.$$

✍ *Si on se laisse emporter par son élan (ce qui ne manque pas d'arriver si on a déjà étudié cette matrice), on trouve aussi*

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2n+(2n-4) & 4+(2n-4) & \cdots & 4+(2n-4) & 2n+(2n-4) \\ 4+(2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4+(2n-4) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 4+(2n-4) & 4 & \cdots & 4 & 4+(2n-4) \\ 2n+(2n-4) & 4+(2n-4) & \cdots & 4+(2n-4) & 2n+(2n-4) \end{pmatrix}$$
$$= 2A^2 + (2n-4)A$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - 2X^2 - (2n-4)X = X.[X^2 - 2X - (2n-4)]$$

et le spectre de A s'en déduit facilement.

Mais quel rapport avec la première question ?

❧ Il est clair que le rang de la matrice A est égal à 2 : les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles et toutes les autres colonnes sont égales à l'une de ces deux colonnes.

Comme $n \geqslant 3$, alors 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé est un sous-espace de dimension $(n-2)$. Plus précisément, une base à peu près évidente de $\operatorname{Ker} A$ est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

c'est-à-dire (en faisant appel à la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(E_1 - E_n, \underbrace{E_2 - E_3, \dots, E_2 - E_i, \dots, E_2 - E_{n-1}}_{(n-3) \text{ vecteurs}})$$

✍ *Il est plus simple de donner une caractérisation cartésienne de ce sous-espace propre :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} A &= [x_1 + \cdots + x_n = 0] \cap [x_1 + x_n = 0] \\ &= [x_1 + x_n = 0] \cap [x_2 + \cdots + x_{n-1} = 0] \end{aligned}$$

mais l'énoncé demande les vecteurs propres et pas seulements les sous-espaces propres.

❧ En considérant très provisoirement A comme une matrice complexe, on peut appliquer le résultat établi à la première question ! En effet, le spectre de A est

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-2)}\}$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 2 \quad \text{et} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \operatorname{tr} A^2 = 4n - 4.$$

Or $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$, donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = 4 - 2n \end{cases}$$

ce qui prouve que λ_1 et λ_2 sont les racines du polynôme

$$X^2 - 2X + (4 - 2n)$$

et donc que

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2n - 3}.$$

Nous allons nous passer de ces valeurs et calculer simultanément les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 en écrivant ces deux valeurs propres sous la forme $1 + \alpha$.

Il s'agit donc de résoudre le système

$$AX = (1 + \alpha)X$$

sachant que l'ensemble des solutions est une droite vectorielle (puisque $1 + \alpha$ est une valeur propre simple).

Pour $2 \leqslant i < n$, on obtient

$$x_1 + x_n = (1 + \alpha)x_i$$

et comme $1 + \alpha \neq 0$, on en déduit que

$$x_2 = \cdots = x_{n-1}$$

et nous allons utiliser x_2 comme un paramètre pour exprimer les autres coordonnées.

La première équation nous donne alors

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = x_1 + \alpha x_1$$

c'est-à-dire

$$\alpha x_1 - x_n = (n-2)x_2.$$

La dernière équation est inutile puisque la matrice $[A - (1+\alpha)I_n]$ n'est pas inversible.

Bref, il s'agit en fait de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha x_1 & - & x_n & = & (n-2)x_2 \\ x_1 & + & x_n & = & (1+\alpha)x_2 \end{array} \right.$$

en fonction du paramètre x_2 : on applique les formules de Cramer et on en déduit que les vecteurs propres associés à la valeur propre $1+\alpha$ ont pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{(n-2)+(1+\alpha)}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\alpha(1+\alpha)-(n-2)}{1+\alpha} \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

puisque $\alpha^2 = 2n-3$.

REMARQUE.— Et si $1+\alpha$ n'était pas valeur propre ? Dans ce cas, la dernière équation viendrait compléter ces calculs et nous devrions imposer $x_2 = 0$ pour éviter toute contradiction. Le vecteur nul serait donc la seule solution...

.

✍ *Il est bon de conclure en remarquant que la matrice A est symétrique réelle et qu'on n'est donc pas surpris de constater qu'elle est diagonalisable !*

Bien que pertinente, cette remarque n'apporte aucune aide dans les calculs à mener ici...

On peut aussi préciser que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui est assez facile à vérifier sur les bases qu'on en a données. Le seul calcul à poser est le suivant (pour vérifier l'orthogonalité des sous-espaces propres associés à $1 \pm \alpha$) :

$$2\frac{n-1+\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{n-1-\alpha}{1-\alpha} + (n-2) = 2\frac{(n-1)^2 - \alpha^2}{1-\alpha^2} + (n-2) = 0$$

puisque $\alpha^2 = 2n-3$.

✍ *On peut aussi calculer le polynôme caractéristique de A. On suivra une tradition typographique bien établie : les coefficients nuls ne seront pas écrits.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$, aucune importance !)

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -\lambda & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & -\lambda & 1 \\ \lambda & & & & -\lambda \end{vmatrix} \qquad (L_n \leftarrow L_n - L_1)$$

On factorise la dernière ligne par $-\lambda$ et on continue :

$$\det(A-\lambda I_n) = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 2 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 2 & & & -\lambda & 1 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 + C_n)$$

On développe par la dernière ligne et (astuce !) on multiplie la première ligne par λ :

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_n) &= - \begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda) & \lambda & \cdots & \lambda \\ 2 & -\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 2 & & & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} \lambda(2-\lambda)+2(n-2) & & & \\ 2 & -\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 2 & & & -\lambda \end{vmatrix} \\ & \qquad\qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \\ &= -(-\lambda)^{n-2}\left[\lambda(2-\lambda)+2(n-2)\right] \end{aligned}$$

et par conséquent le polynôme caractéristique de A est

$$X^{n-2}[X^2 - 2X - 2n + 4].$$