Autres écoles PSI - 1206

✍ *Nous allons traiter cet exercice de manière élémentaire, mais on pourrait évoquer plusieurs résultats de nature géométrique pour aller plus vite en voyant plus loin. À tout à l'heure !*

On note
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
de telle sorte que
$$A = (x_i x_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
ou, plus clairement en lisant A colonne par colonne,
$$A = \begin{pmatrix} x_1 X & x_2 X & \cdots & x_n X \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Comme $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ n'est pas la colonne nulle,
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$$
donc la matrice A n'est pas la matrice nulle et son rang est donc au moins égal à 1.

Réciproquement, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à la colonne X, donc le rang de A est au plus égal à 1.

Bref : le rang de A est égal à 1.

❧ En particulier, 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à cette valeur propre (alias $\operatorname{Ker} A$) est un sous-espace de dimension $(n-1)$.

D'autre part,
$$AX = (XX^T).X = X.\underbrace{(X^TX)}_{=\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{R}} = \operatorname{tr}(A).X$$
et comme la colonne X n'est pas la colonne nulle, il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Conclusion : le spectre de A est $\{0, \operatorname{tr}(A)\}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On a trouvé deux valeurs propres distinctes 0 et $\operatorname{tr}(A) > 0$, on a constaté que les dimensions des deux sous-espaces propres étaient respectivement égale à $(n-1)$ et au moins égale à 1, donc A est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à $\operatorname{tr}(A)$ est donc la droite $\mathbb{R} \cdot X$ et le polynôme caractéristique de A est donc égal à
$$(X-0)^{n-1}(X - \operatorname{tr} A)^1 = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} A).$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Comme A est semblable à
$$\operatorname{Diag}(\operatorname{tr} A, 0, \ldots, 0),$$
alors $I_n + A$ est semblable à
$$\operatorname{Diag}(1 + \operatorname{tr} A, 1, \ldots, 1)$$
donc
$$\det(I_n + A) = (1 + \operatorname{tr} A).1^{n-1} = 1 + \operatorname{tr} A = 1 + X^T.X.$$

✍ *Un peu de géométrie maintenant ?*

Soient e*, le vecteur représenté par la colonne* X *dans la base canonique de* $E = \mathbb{R}^n$ *et* φ*, l'endomorphisme représenté par* A *dans la base canonique de* E*.*

On suppose que E *est muni du produit scalaire canonique. Dans ces conditions,*

$$\forall\, u \in E, \quad \varphi(u) = e.\langle\, e \,|\, u \,\rangle \;=\; \langle\, e \,|\, u \,\rangle \cdot e = \|e\|^2 \cdot p(u)$$

où p *est la projection orthogonale sur la droite* $D = \mathbb{R} \cdot e$*.*

Il est donc clair que le rang de φ *est égal à* 1 *(= le rang de* p*), que les valeurs propres de* φ *sont* 0 *et* $\|e\|^2$ *(proportionnelles aux valeurs propres de* p*) et que les sous-espaces propres de* φ *respectivement associés à ces valeurs propres sont l'hyperplan* $H = (\mathbb{R} \cdot e)^\perp$ *et* $\mathbb{R} \cdot e$ *(= les sous-espaces propres de* p*, c'est-à-dire le noyau et l'image de la projection).*