✍ *On n'a ici aucune idée de ce que pourrait être le polynôme minimal de f (on ne dispose d'aucune indication sur la nature géométrique de f [projecteur, symétrie...] par exemple).*

Le seul théorème applicable est donc celui qui nous assure que le degré du polynôme minimal est inférieur à la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

On ne peut donc pas se contenter d'étudier f, endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.

Le sous-espace $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace stable par f de dimension $r = \operatorname{rg} f$. On note f_0, l'endomorphisme de $F = \operatorname{Im} f$ induit par restriction de f à $\operatorname{Im} f$.

Comme $\dim \operatorname{Im} f = r$, on en déduit que le degré du polynôme minimal de f_0 est inférieur ou égal à r.

Il existe donc un polynôme

$$\mu_0 = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

dont le degré d est inférieur à r et qui annule f_0 :

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f, \quad (f_0^d + a_{d-1} f_0^{d-1} + \cdots + a_1 f_0 + a_0 \operatorname{Id})(y) = 0_E.$$

Comme f_0 est induit par restriction de f à $\operatorname{Im} f$, on en déduit qu'en fait

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} f, \quad (f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \operatorname{Id})(y) = 0_E.$$

Pour tout $x \in E$, on a $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ (par définition même de $\operatorname{Im} f$), donc

$$\forall\, x \in E, \quad (f^d + a_{d-1} f^{d-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \operatorname{Id})[f(x)] = 0_E$$

ce qui prouve que le polynôme

$$X^{d+1} + a_{d-1}X^d + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$$

est un polynôme unitaire annulateur de f.

Le polynôme minimal de f est un diviseur de ce polynôme, donc le degré du polynôme minimal de f est inférieur ou égal à $(r+1)$.