Autres écoles PSI - 1203

1. Soient a et b, deux réels tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad a e_1(t) + b e_2(t) = 0.$$

Avec $t = 0$, on obtient $a = 0$ et avec $t = \pi/2$, on a aussi $b = 0$. Donc la famille (e_1, e_2) est libre.

2. L'application T_f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en tant que combinaison linéaire de e_1 et de e_2.

D'autre part,

$$[f \mapsto f(0)] \quad \text{et} \quad [f \mapsto f'(0)]$$

sont bien des formes linéaires sur E, donc $[f \mapsto T_f]$ est bien une application linéaire.

❧ On sait que la dimension de l'espace de départ E est infinie. On a remarqué que l'image de u était contenue dans $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, espace vectoriel de dimension deux.

Comme $\dim F < \dim E$, l'application $u \in L(E, F)$ n'est pas injective.

3. On a déjà remarqué que le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ était stable par u, donc il existe bien un endomorphisme de F induit par restriction de u : c'est celui que l'énoncé note v.

✍ *La question est très mal formulée. La notation $u_{|F}$ désigne la restriction de u à F et, par définition, il s'agit d'une application de F dans E (puisque $u : E \to E$), qui ne peut donc pas être un endomorphisme.*

4. D'après la première question, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de F. Dans cette base, la matrice de v est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

La trace est égale à $3 = 2 + 1$ et le déterminant à $2 = 2 \times 1$, donc les valeurs propres de v sont 1 et 2.

❧ Comme

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -9 \end{pmatrix},$$

les applications

$$2e_1 + 3e_2 \quad \text{et} \quad 3e_1 + 4e_2$$

sont des vecteurs propres de v respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2.

❧ En posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on définit donc une matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, 2).$$