Autres écoles MP - 1202

Par hypothèse, le polynôme

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

est un polynôme annulateur de u.

1. La dimension de $\mathbb{R}^3$ est égale à 3, donc le degré du polynôme caractéristique χ de u, égal à 3, est impair.

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle (avatar du Théorème des valeurs intermédiaires), donc χ possède au moins une racine réelle, donc u admet au moins une valeur propre réelle.

Toute valeur propre de u est en particulier une racine du polynôme annulateur (X^3-1) et la **seule** racine réelle de (X^3-1) est égale à 1. Par conséquent, 1 est bien une valeur propre de u (et c'est sa seule valeur propre réelle).

2. Les facteurs $(X-1)$ et (X^2+X+1) sont irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$), unitaires et distincts, donc ils sont premiers entre eux. Comme leur produit : (X^3-1) est un polynôme annulateur de u, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id}).$$

3. Commençons par analyser la matrice donnée.

Si cette matrice représente u dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors

$$e_2 = u(e_1), \quad e_3 = u(e_2) = u^2(e_1) \quad \text{et} \quad e_1 = u(e_3) = u^3(e_1) = e_1$$

puisque, par hypothèse, $u^3 = \mathrm{Id}$.

✍ *Ainsi $\mathscr{B} = \big(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\big)$. Il s'agit donc uniquement de bien choisir le vecteur e_1...*

❧ *Si on choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$, alors $e_2 = u(e_1) = e_1$, ce qui contredit le fait que la famille (e_1, e_2) doive être une famille libre.*

❧ *Si on choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$, alors*

$$e_3 + e_2 + e_1 = (u^2+u+\mathrm{Id})(e_1) = 0$$

ce qui contredit le fait que la famille (e_1, e_2, e_3) soit libre.

❧ *Puisque $E = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$, le vecteur e_1 peut être décomposé*

$$e_1 = \underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})} + \underbrace{z}_{\in \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})}$$

et d'après ce qui précède, il faut que $y \neq 0$ et que $z \neq 0$.

▶ Comme $1 \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \neq \{0\}$, donc il existe y_0 *non nul* dans $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$.

▶ Comme $u \neq \mathrm{Id}$, alors $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \subsetneq \mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ et il existe $z_0 \in \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$, *non nul*.

La famille (z_0) est donc une famille libre.

▶ Le sous-espace

$$G = \mathrm{Ker}(u^2+u+\mathrm{Id})$$

est stable par u et l'endomorphisme $u_G \in L(G)$ induit par restriction de u admet évidemment X^2+X+1 pour polynôme annulateur. Comme ce polynôme n'a pas de racine réelle, cela signifie que u_G n'a pas de valeur propre réelle et donc que le sous-espace G ne contient aucun vecteur propre de u_G.

Si le couple

$$\big(z_0, u(z_0)\big) = \big(z_0, u_G(z_0)\big)$$

était lié, alors z_0 serait un vecteur propre de u_G : on vient de voir que c'est impossible !

Par conséquent, le couple $\big(z_0, u(z_0)\big)$ est une famille libre.

► Comme les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et G sont en somme directe, que (y_0) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ et que $\big(z_0, u(z_0)\big)$ est une famille libre de G, la famille

$$\big(y_0, z_0, u(z_0)\big)$$

est libre.

✍ *La propriété de somme directe permet de concaténer des familles libres en conservant l'indépendance linéaire des vecteurs (sans avoir à poser de calculs pour justifier ce fait).*

► Posons maintenant

$$e_1 = y_0 + z_0.$$

Par linéarité de u,

$$u(e_1) = y_0 + u(z_0) \quad \text{et} \quad u^2(e_1) = y_0 + u^2(z_0) = y_0 - z_0 - u(z_0)$$

puisque $z_0 \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$ et donc $u^2(z_0) + u(z_0) + z_0 = 0$.

▷ Soient a, b et c, trois réels tels que

$$ae_1 + bu(e_1) + cu^2(e_1) = 0.$$

On en déduit que

$$(a+b+c)y_0 + (a-c)z_0 + (b-c)u(z_0) = 0.$$

▷ Comme la famille $\big(y_0, z_0, u(z_0)\big)$ est libre, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & c & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$$

et donc que $a = b = c = 0$ (système de Cramer). Par conséquent, la famille

$$\big(e_1, u(e_1), u^2(e_1)\big)$$

est libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de u relative à cette base est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(par définition de la base pour les deux premières colonnes ; à cause de $u^3 = \mathrm{Id}$ pour la troisième colonne).