1. La matrice A est triangulaire par blocs, donc le spectre de A est l'union des spectres des deux blocs diagonaux.

La première ligne de la matrice nous dit que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.

Le bloc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = I_2 + J_2 \qquad \text{avec} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'endomorphisme induit par restriction de f à un plan stable par f. Les valeurs propres de J_2 sont bien connues : 0 et 2, donc les valeurs propres du bloc $I_2 + J_2$ sont 1 et 3.

Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{1,\ 3\}$.

✍ *On a en fait démontré sans le dire que $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$ – c'est sous-entendu dans la remarque montrant que A est triangulaire par blocs.*

❧ Comme le rang de la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et que $C_2 - C_3 = 0$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle dirigée par $e_1 = (0, 1, -1)$.

Comme le rang de la matrice

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2 et que $C_2 + C_3 = 0$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle dirigée par $e_3 = (0, 1, 1)$.

La somme des dimensions des différents sous-espaces propres (1+1) est différente de la dimension de l'espace (3), donc l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

✍ *Comme χ_A est scindé, la matrice A est quand même trigonalisable. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,*

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$$

et comme

$$(A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

le noyau de $(f - \mathrm{Id})^2$ est le plan cartésien

$$[x + 2y + 2z = 0].$$

Le vecteur $\varepsilon_2 = (2, -1, 0)$ appartient donc au plan $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ et d'après la matrice $A - I_3$,

$$f(\varepsilon_2) - \varepsilon_2 = (0, -1, 1) = -e_1.$$

Comme $\varepsilon_1 = -e_1$ et ε_2 sont deux vecteurs non proportionnels de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ et que e_3 est un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$, la famille

$$\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

NB : le principe consiste à choisir un vecteur $\varepsilon_2 \neq 0$ quelconque dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ et à calculer son image par f pour en déduire le vecteur ε_1 qui va nous donner une base du sous-espace stable.

$\boxed{\textbf{2.}}$ On **admet** à ce stade l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = f$.

Comme $g \circ f = g^3 = f \circ g$, chaque sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ est stable par g.

Par conséquent, $g(e_1)$ appartient à la droite $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R} \cdot e_1$ et $g(e_3)$ appartient à la droite $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R} \cdot e_3$.

✍ *Je n'ai pas tout à fait répondu à la question posée...*

$\boxed{\textbf{3.}}$ Toute droite stable par g est dirigée par un vecteur propre de g, donc e_1 et e_3 sont des vecteurs propres de g.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Si g était diagonalisable, alors $f = g^2$ serait aussi diagonalisable (avec une même base de vecteurs propres, bien entendu). Par conséquent, g n'est pas diagonalisable.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Si $g(x) = \lambda \cdot x$, alors $f(x) = g\big(g(x)\big) = \lambda^2 \cdot x$, donc $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(f)$. Or $\mathrm{Sp}(f) = \{1,\ 3\}$, donc les valeurs propres possibles pour g sont ± 1 et $\pm\sqrt{3}$.

❧ En particulier, g est inversible (0 n'est pas une valeur propre de g), donc ni $g(e_1)$, ni $g(e_3)$ ne sont nuls et ce sont donc bien des vecteurs propres de f. (Cela complète la réponse à la seconde question.)

❧ Le vecteur e_1 (resp. e_3), en tant que vecteur propre de g, est associé à une valeur propre λ telle que $\lambda^2 = 1$ (resp. $\lambda^2 = 3$).

❧ Enfin, comme g n'est pas diagonalisable, son spectre ne peut contenir plus de deux valeurs propres différentes.

❧ Finalement, les spectres possibles pour g sont

$$\{1,\ \sqrt{3}\}, \quad \{-1,\ \sqrt{3}\}, \quad \{1,\ -\sqrt{3}\}, \quad \{-1,\ -\sqrt{3}\}.$$

✍ ***Compléments : les sous-espaces stables par f***

Les sous-espaces $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$ sont évidemment stables par f.

Les droites stables par f sont dirigées par des vecteurs propres de f. Il y en a donc exactement deux : $D_1 = \mathbb{R} \cdot e_1$ et $D_3 = \mathbb{R} \cdot e_3$.

Les plans stables par f sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$, ils sont décrits par les vecteurs propres de ${}^tA$. Comme

$${}^tA - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad {}^tA - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

les plans

$$P_1 = [1.x + 0.y + 0.z = 0] = [x = 0] \quad \textit{et} \quad P_3 = [1.x + 2.y + 2.z = 0]$$

sont les plans stables par f.

Le plan P_1 est engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique : c'est le plan stable qu'on a identifié d'emblée en remarquant que la matrice A était triangulaire par blocs. C'est aussi le plan engendré par les deux vecteurs propres e_1 et e_3 !

Le plan P_3 était mieux caché : c'est le plan $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$.