Autres écoles MP - 1167

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+nx}.$$

1. Il est clair que, pour tout $x > 0$, la suite de terme général

$$\left|u_n(x)\right| = \frac{1}{1+nx}$$

tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est donc convergente.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme S est bien définie sur cet intervalle.

REMARQUE.— La série $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement pour $x = 0$.

2. Puisque les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, on sait comment dominer le reste d'ordre n :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

❧ Pour $a > 0$, on en déduit que

$$\forall\, x \in [a,+\infty[, \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, cela signifie que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Comme les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (et donc en particulier sur $[a,+\infty[$), on en déduit que la somme S est continue sur $[a,+\infty[$.

❧ Cela étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que la conclusion est vraie sur $]0,+\infty[$: la somme S est continue sur $]0,+\infty[$.

✍ *La domination du reste donnée par le Critère spécial des séries alternées ne permet pas de conclure à la convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. En effet, le majorant trouvé sur cet intervalle :*

$$\sup_{x>0} \frac{1}{1+(n+1)x} = 1$$

ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$!

D'autre part, chaque fonction u_n tend vers une limite finie (égale à ± 1) au voisinage de 0 et le Théorème d'interversion des limites (ou Théorème de la double limite) nous dit que, si la série $\sum u_n$ convergeait uniformément sur un voisinage de 0, alors en particulier la série numérique

$$\sum \lim_{x\to 0} u_n(x) = \sum (-1)^n$$

serait convergente ! La question est réglée : la série $\sum u_n$ ne converge uniformément sur aucun voisinage de 0.

✍ *On a établi la continuité de la somme par un argument de convergence uniforme. Il est important de noter qu'on ne pouvait pas invoquer la convergence normale :*

$$\forall\, a > 0, \quad \sup_{x\in[a,+\infty[} \left|u_n(x)\right| = u_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{na}$$

et la série $\sum {}^1/_{na}$ est divergente.

$\boxed{\textbf{3.}}$ On a démontré que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait uniformément sur l'intervalle $[1, +\infty[$, qui est un voisinage de $+\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et d'autre part la fonction u_0 tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

La convergence uniforme au voisinage de $+\infty$ nous autorise à passer à la limite terme à terme : la somme S tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et cette limite est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = 1.$$

REMARQUE.— Comme cette limite est un réel non nul, on peut aussi présenter le résultat sous la forme d'un équivalent :

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 1.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x > 0, \quad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}.$$

► On sait que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

✍ *Il nous reste à démontrer que la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément sur chaque l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ afin de pouvoir conclure.*

► L'inégalité

$$\left|u_{n+1}'(x)\right| \leqslant \left|u_n'(x)\right|$$

équivaut (après quelques simplifications...) à

$$n(n+1)x^2 \geqslant 1.$$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $x^2 \geqslant a^2$ et par conséquent, la suite extraite

$$\big(\left|u_n'(x)\right|\big)_{n \geqslant 1/a}$$

tend vers 0 en décroissant.

Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont donc satisfaites pour tout $x \geqslant a$ à partir du rang $n \geqslant 1/a$. En particulier,

$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, n \geqslant \frac{1}{a}, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k'(x)\right| \leqslant \frac{n+1}{(1+[n+1]a)^2}.$$

Le majorant est indépendant de x et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est un majorant en $\mathcal{O}(1/n)$), donc la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$.

► On en déduit que la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que

$$\forall\, x \geqslant a, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Comme cette propriété est vraie pour tout $a > 0$, on en déduit qu'en fait la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x > 0, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$