Autres écoles MP - 1166

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}.$$

1. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+n^2x} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

donc la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

2. On peut aussi remarquer que, pour tout $a > 0$,

$$\forall x \geqslant a, \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1/a}{n^2}.$$

Le majorant trouvé est indépendant de x et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur chaque intervalle $[a, +\infty[$ et en particulier au voisinage de $+\infty$.

Comme chaque fonction u_n tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ (vers 0 pour tout $n \geqslant 1$ et vers 1 pour le cas particulier $n = 0$), on déduit du Théorème de la double limite que la somme f tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1.$$

3. Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall k \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad u_n^{(k)}(x) = (n^2)^k \frac{(-1)^k k!}{(1+n^2x)^{k+1}}.$$

Pour tout $a > 0$ et tout $k \geqslant 1$, on en déduit facilement que

$$\forall x \geqslant a, \quad \big|u_n^{(k)}(x)\big| \leqslant \frac{(n^2)^k k!}{(1+n^2a)^{k+1}}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de x et de plus

$$\frac{(n^2)^k k!}{(1+n^2a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

puisque k et a sont fixés.

Nous venons de démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$, la série des dérivées $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, quel que soit $a > 0$.

On en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur

$$]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$

et que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(x).$$

(NB : la fonction u_0 est constante, donc ses dérivées sont nulles.)

4. Fixons $x > 0$. La fonction φ définie par

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2x}$$

est clairement continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit (figure !!!) que

$$f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(n) = f(x)$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Or, comme $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2 x} &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dt}{1+(\sqrt{x}\,t)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}\,t)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale est donc un infiniment grand lorsque x tend vers 0 donc les deux termes extrêmes de l'encadrement (1) sont équivalents, ce qui permet d'en déduire que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$