Autres écoles MP - 1165

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(1/n^2)$$

donc la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente. La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $A > 0$, on a

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-A, A], \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{A}{n^2}.$$

Le majorant est indépendant de $x \in [-A, A]$ et c'est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-A, A]$.

Comme $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$, la somme f de cette série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x > 0$. La fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{2x}{t^2 + x^2}\right]$$

est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. La série $\sum \varphi(n) = \sum f_n(x)$ est absolument convergente, la fonction φ est évidemment intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et par comparaison de la somme avec l'intégrale (faire une figure !)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

c'est-à-dire

$$\frac{-2}{x} + \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Or (primitive à connaître !)

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \left[2 \operatorname{Arctan} \frac{t}{x}\right]_0^{+\infty} = \pi$$

et par encadrement

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi.$$