✍ *Convergence uniforme sur un segment, fonctions polynomiales... Évidemment, c'est l'occasion d'appliquer le Théorème de Weierstrass !*

Mais attention, si la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers u, rien ne prouve que la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées converge uniformément sur I vers la dérivée u'...

Par hypothèse, la dérivée u' est continue sur le segment $[0,1]$, donc il existe une suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers u' (Théorème d'approximation de Weierstrass) :

$$\lim_{n\to+\infty} \|Q_n - u'\|_\infty = 0.$$

Comme u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après le Théorème fondamental,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt.$$

Par analogie, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad P_n(x) = u(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt.$$

En tant que primitive de la fonction polynomiale Q_n, la fonction P_n est elle aussi polynomiale.

De plus, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\big|P_n(x) - u(x)\big| &= \left|\left(u(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt\right) - \left(u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt\right)\right| \\ &= \left|\int_0^x Q_n(t) - u'(t)\,dt\right| \\ &\leqslant |x - 0|\, \|Q_n - u'\|_\infty\end{aligned}$$

car

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|Q_n(t) - u'(t)\big| \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty.$$

On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|P_n(x) - u(x)\big| \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0,1]$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|P_n - u\|_\infty \leqslant \|Q_n - u'\|_\infty$$

donc la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers u. Et de plus, par construction, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers u'.