Mines Ponts MP - 630

1. ???

2. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme

$$\lim_{a \to +\infty} \mathbf{P}(X_1 \geqslant a) = 0$$

par continuité décroissante, il existe $a_0 > 0$ tel que

$$0 \leqslant \mathbf{P}(X_1 \geqslant a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme ${}^{a_0}/_{n}$ tend vers 0, il existe aussi un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{a_0}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la première question,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \frac{\mathbf{E}(R_n)}{n} \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que $\mathbf{E}(R_n) = o(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Cette démonstration est dans le cours : c'est ainsi qu'on démontre que le théorème de sommation des relations de comparaison avec o.

3. Si X est une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum n\,\mathbf{P}(X = n)$ est convergente. En particulier, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \geqslant N \sum_{n=N}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) = N\,\mathbf{P}(X \geqslant N) \geqslant 0$$

et comme le reste d'une série convergente tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{P}(X \geqslant N) = o\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

❧ Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \forall\, a > 0, \quad 0 \leqslant \mathbf{E}(R_n) \leqslant a + \frac{n\varepsilon}{a}.$$

En étudiant les variations de

$$\Big[a \mapsto a + \frac{n\varepsilon}{a}\Big]$$

sur $]0, +\infty[$, on constate que le minimum est atteint pour $a = \sqrt{n\varepsilon}$ et que ce minimum est égal à $2\sqrt{n\varepsilon}$. On en déduit donc que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant \mathbf{E}(R_n) \leqslant 2\sqrt{n\varepsilon}$$

et donc que $E(R_n) = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— Cette démonstration est classique : elle permet de déduire l'inégalité de Tchernov de l'inégalité de Markov.