Le membre de gauche est une matrice symétrique, la matrice du membre de droite est quelconque : nous allons certainement nous simplifier la tâche en nous souvenant que

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Quelle que soit la matrice $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (S, T) tel que

$$X = S + T, \quad {}^tS = S, \quad {}^tT = -T.$$

On a alors

$${}^tX + X = 2S \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} S$$

et l'équation devient

$$2S = \operatorname{tr} S \cdot A.$$

On en déduit en particulier que

$$2 \operatorname{tr} S = \operatorname{tr} S \cdot \operatorname{tr} A.$$

❧ Premier cas : si $\operatorname{tr} S = 0$, l'équation devient $2S = 0$, c'est-à-dire $S = 0$ et donc $X = T$, la matrice antisymétrique T étant quelconque et la matrice A n'apparaissant plus dans l'équation !

❧ Deuxième cas : si $\operatorname{tr} S \neq 0$, alors il faut que $\operatorname{tr} A = 2$.
Si $\operatorname{tr} A \neq 2$, l'équation n'a pas de solution.
Si $\operatorname{tr} A = 2$, l'équation devient

$$\operatorname{tr} A \cdot S = \underbrace{\operatorname{tr} S}_{\neq 0} \cdot A,$$

donc il faut aussi que A soit symétrique.

Réciproquement, si $\operatorname{tr} A = 2$ et si A est symétrique, alors on pose

$$X = \alpha A + T$$

où α est réel et T antisymétrique. On en déduit que

$$\operatorname{tr} X = \alpha \operatorname{tr} A + 0 = 2\alpha$$

et que

$${}^tX + X = 2\alpha A = \operatorname{tr} X.A,$$

donc X est bien solution.

► En conclusion, les solutions de l'équation sont
- d'une part les matrices antisymétriques ;
- d'autre part, mais seulement si A est symétrique et si $\operatorname{tr} A = 2$, les matrices de la forme

  $$X = \alpha A + T$$

  où α est un réel quelconque et T, une matrice antisymétrique.