Mines Ponts PC - 768

$\boxed{\textbf{1.}}$ On suppose que f et g commutent.

❧ Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f,$$

donc $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

❧ Soit $x \in \operatorname{Ker} f$: on a donc $f(x) = 0$ et par linéarité de g, on a $g\big(f(x)\big) = 0$. Comme f et g commutent, on a aussi $f\big(g(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Si f et p commutent, alors $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f (d'après la question précédente).

❧ Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ soient stables par f. On sait que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que

$$\forall\, x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker} p}. \tag{$\star$}$$

En appliquant $(\star)$ à $f(x)$ au lieu de x, on obtient que

$$f(x) = (p \circ f)(x) + \big[f(x) - (p \circ f)(x)\big].$$

Par linéarité de f et du fait que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f, on en déduit que

$$f(x) = \underbrace{(f \circ p)(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big[f(x) - (f \circ p)(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} p}.$$

Or $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, donc la décomposition du vecteur $f(x)$ est unique : par identification, on a donc

$$\forall\, x \in E, \quad (p \circ f)(x) = (f \circ p)(x)$$

donc p et f commutent.

Il ne suffit pas de savoir que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E, il faut aussi connaître et utiliser la décomposition $(\star)$.