Mines Ponts PC - 772

1. Toute matrice nilpotente est trigonalisable (son polynôme minimal, de la forme X^d, est scindé) et donc semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Par conséquent, les deux matrices
$$A_n = I_n + N + \cdots + N^{n-1}$$
et
$$B_n = I_n + 2N + \cdots + nN^{n-1}$$
sont semblables à des matrices triangulaires dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et donc tous différents de 0 : ces deux matrices sont donc inversibles.

2. Pour calculer leurs inverses, inspirons-nous des séries entières : pour $|x| < 1$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
et l'inverse de cette somme est égal à $(1-x)$; de même,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
et l'inverse de cette somme est égal à $(1-x)^2$.

❧ Comme $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors $N^n = 0_n$ (penser à Cayley-Hamilton !) et
$$(I_n - N)(I_n + N + \cdots + N^{n-1}) = I_n - N^n = I_n$$
(somme télescopique), ce qui prouve que A_n est bien inversible et que son inverse est égal à $(I_n - N)$.

De plus,
$$N \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)N^k\right) = \sum_{k=1}^{n} kN^k = N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k$$
$$N^2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)N^k\right) = \sum_{k=2}^{n+1} kN^k = \sum_{k=2}^{n-1} kN^k$$
donc
$$\begin{aligned}(I_n - N)^2 B_n &= (I_n - 2N + N^2)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)N^k\right)\\ &= \left(I_n + 2N + \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)N^k\right)\\ &\qquad - 2\left(N + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k\right) + \sum_{k=2}^{n-1} kN^k\\ &= I_n\end{aligned}$$
ce qui prouve que l'inverse de B_n est égal à $(I_n - N)^2$.