# Mines Ponts PC - 779

$\boxed{\textbf{1.}}$ L'image de $f$ est engendrée par les colonnes de $A$, donc $\operatorname{rg} f = 2$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et comme deux relations de liaison entre les colonnes sautent aux yeux, on en déduit que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\big).$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Quel que soit l'endomorphisme $f$, l'image de $f$ est TOUJOURS stable par $f$ ! (Et le calcul pour le prouver est immédiat !)

$\boxed{\textbf{3.}}$ Prenons pour base de $\operatorname{Im} f$ les deux vecteurs donnés ci-dessus :

$$\mathscr{B} = \big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (4,2,2,4) = 2\cdot(1,1,1,1) + 2\cdot(1,0,0,1) \\ f(1,0,0,1) &= (2,2,2,2) = 2\cdot(1,1,1,1) + 0\cdot(1,0,0,1) \end{aligned}$$

et on en déduit que la matrice de $g$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Le polynôme caractéristique de $M$ est égal à $X^2 - 2X - 4$.
Les valeurs propres de la matrice $M$ sont donc

$$1 \pm \sqrt{5}$$

et, quelle que soit la valeur propre $\lambda$ de $M$, il est clair que les vecteurs du noyau de

$$(M - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

sont proportionnels au vecteur (non nul !)

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

. De plus,

$$(M - \lambda I_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda - 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'après le polynôme caractéristique de $M$.

❧ En conclusion, l'endomorphisme $f$ est diagonalisable (sa matrice est symétrique réelle...) ;

- le sous-espace propre associé à la valeur propre $0$ est $\operatorname{Ker} f$, dont on a donné une base plus haut ;
- le sous-espace propre associé à la valeur propre $1+\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1+\sqrt{5})\cdot(1,1,1,1) + 2\cdot(1,0,0,1)$$

- et le sous-espace propre associé à la valeur propre $1-\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1-\sqrt{5})\cdot(1,1,1,1) + 2\cdot(1,0,0,1).$$

REMARQUE.— Il faut bien comprendre que les vecteurs propres de $g$ sont aussi les vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres autres que $0$ et que la matrice $B$ nous a servi à calculer ces vecteurs propres dans la base $\mathscr{B}$. Cela dit, on attend que ces vecteurs propres soient donnés dans la base canonique...