Mines Ponts PC - 874

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

1. Soit $A > 0$.
Chaque fonction u_n est croissante et impaire, donc

$$\forall\, x \in [-A, A], \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant u_n(A)$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, le réel A étant fixé,

$$u_n(A) \sim \frac{A}{n^2}.$$

On a ainsi prouvé que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait normalement sur chaque segment $[-A, A]$.

Comme les fonctions u_n sont évidemment continues sur $[-A, A]$, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A].$$

2. Chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + (x/n)^2}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant u_n'(x) \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ce qui prouve que la série dérivée $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Comme on a déjà justifié que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, au voisinage de $+\infty$.

3. On a vu plus que la série de fonctions $\sum u_n'$ convergeait normalement sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, qu'elle convergeait uniformément au voisinage de $+\infty$.

Chaque fonction u_n' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc f' tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ (Théorème de la double limite).

❧ Quant à f, c'est plus compliqué à rédiger, mais c'est très classique. Après avoir jeté ses idées au brouillon, on rédige dans un ordre cohérent et ça donne à peu près ça :

Soit $S > 0$. Comme la série harmonique est une série divergente de terme général positif, il existe un rang N_0 tel que

$$\frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n}\right) \geqslant S.$$

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x) = \frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n}\right) > \frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n}\right),$$

il existe $A_0 > 0$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A_0, \quad \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x) \geqslant \frac{\pi}{4}\left(\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n}\right)$$

et comme $\sum u_n(x)$ est une série de terme général positif, on en déduit enfin que

$$\forall\, x \geqslant A_0, \quad f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N_0} u_n(x).$$

On a ainsi établi que

$$\forall\, S > 0,\ \exists\, A_0 > 0,\ \forall\, x \geqslant A_0, \quad f(x) \geqslant S$$

c'est-à-dire : la fonction f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.