Mines Ponts PC - 876

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Il est clair que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant pour tout $x \neq 0$. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ est alors convergente.

Pour $x = 0$, le terme général $u_n(0) = 1$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement.

Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R}^*$. Comme la fonction f est évidemment paire, on va l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Pour tout $a > 0$, on a

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+n^2a^2}.$$

On a un majorant indépendant de x, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues, on en déduit que la somme f est continue sur

$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[.$$

REMARQUE.— Pour cette question, le Critère spécial des séries alternées n'apporte rien.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Comme on intègre sur un intervalle non borné, la convergence normale et la convergence uniforme ne sont d'aucun secours.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction positive u_n est évidemment intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} u_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

(changement de variable $y = nx$) et par conséquent la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \big|u_n(x)\big|\,dx$$

est divergente : on ne peut pas appliquer le théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

❧ La méthode usuelle en pareil cas consiste à appliquer le Théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonctions. Mais le Critère spécial des séries alternées nous dit comment majorer le reste de la série, pas comment majorer les sommes partielles...

❧ D'après la première question, le reste d'ordre N, défini par

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$. D'après le Critère spécial des séries alternées,

$$\forall\, x > 0, \quad \big|R_N(x)\big| \leqslant \frac{1}{1+(N+1)^2x^2} \qquad (\star)$$

donc R_N est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont intégrables sur $]0, +\infty[$, on en déduit que

$$f = -u_1 + \cdots + (-1)^N u_N + R_N$$

est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ et, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{+\infty} u_n(x)\,dx + \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \pi}{2n} + \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx.
\end{aligned}$$

L'encadrement $(\star)$ et la positivité de l'intégrale nous donnent

$$\forall\, N \geqslant 1, \qquad \left| \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(N+1)^2 x^2} = \frac{\pi}{2(N+1)}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2n} = \frac{-\pi \ln 2}{2}.$$

REMARQUE.— D'après le Critère spécial des séries alternées, la fonction f est négative (la somme est du signe du premier terme), c'est pourquoi l'intégrale de f est négative.

REMARQUE.— Le calcul de la somme est un classique, qui se montre très facilement : tout d'abord

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dt}{1+t} &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n t^n\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,dt \qquad \text{(somme géométrique)}
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\forall\, 0 \leqslant t < 1, \qquad \left| \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \right| \leqslant t^{N+1}$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{N+1}\,dt = \frac{1}{N+2}.$$