❧ Comme f est inversible,

$$f+g=f\circ(\mathrm{I}+g\circ f^{-1})$$

et comme $GL(E)$ est un groupe pour $\circ$, on en déduit que $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, $(\mathrm{I}+g\circ f^{-1})$ est inversible.

❧ Or

$$(\mathrm{I}+g\circ f^{-1})=(g\circ f^{-1})-(-1)\cdot \mathrm{I}$$

donc $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, (-1) n'est pas une valeur propre de $(g\circ f^{-1})$.

❧ Comme le rang de g est égal à 1 et que f^{-1} est inversible, le rang de $g\circ f^{-1}$ est aussi égal à 1. Par conséquent, $g\circ f^{-1}$ admet 0 comme valeur propre de multiplicité au moins égale à $(n-1)$ (Théorème du rang) et la valeur propre restante est donc égale à $\mathrm{tr}(g\circ f^{-1})$ (= la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité).

Ainsi $(f+g)$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{tr}(g\circ f^{-1})\neq -1$.

REMARQUE.— Exo pour taupins si bien entraînés qu'ils savent *tout* sur les endomorphismes de rang 1...