Mines Ponts MP - 541

❧ Par hypothèse, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice inversible P_k telle que
$$A_k P_k = P_k B_k.$$

REMARQUE.— Cette manière, peu habituelle, d'écrire la propriété de similitude va nous affranchir des questions relatives à la continuité de la fonction $\left[P \mapsto P^{-1}\right]$.

On sait que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers A et B. Si la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers une matrice P et que cette matrice P est encore inversible, alors on a $AP = PB$ (par continuité de la multiplication matricielle, opération bilinéaire sur un espace de dimension finie), donc les matrices A et B sont bien semblables.

Mais le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est un ouvert, pas un fermé, donc il se pourrait que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeât vers une matrice P non inversible. Et il se pourrait aussi que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne fût même pas convergente...

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ces deux matrices sont semblables : la matrice A_k est triangulaire, elle admet $n = 2$ valeurs propres distinctes, donc elle est semblable à la matrice diagonale B_k.

Les deux suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (et donc pour toutes les normes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$), respectivement vers
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = 0_2.$$

La matrice A est nilpotente d'indice 2 et la matrice B est diagonale, donc A et B ne sont pas semblables.

REMARQUE.— Une matrice de passage qui mène de A_k à B_k est, par exemple, la matrice
$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}.$$

La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge mais sa limite n'est pas inversible...

Une autre matrice de passage possible est
$$Q_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et cette fois, la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente (car pas bornée).

2. On suppose ici que toutes les matrices de passage appartiennent au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Différence majeure ! Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un compact. Par conséquent, il existe une suite extraite $(P_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$.

En tant que suites extraites de suites convergentes, les deux suites $(A_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(B_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent vers A et B respectivement.

Comme la multiplication matricielle est une opération continue et que
$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \quad A_{\varphi(j)} P_{\varphi(j)} = P_{\varphi(j)} B_{\varphi(j)},$$
on en déduit par passage à la limite que
$$AP = PB$$
et comme P est une matrice orthogonale, on en déduit que les limites A et B sont encore orthogonalement semblables.