❧ La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}}$$

est évidemment continue sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Elle tend vers 1 au voisinage de 0 (équivalent bien connu) et

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ell n\, t}{t^{3/2}} = o\Big(\frac{1}{t^{5/4}}\Big)$$

donc f est bien intégrable sur I.

❧ La série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ est évidemment convergente !

❧ L'application φ définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur $]0, 1[$. Cette bijection est décroissante.

Il est clair que

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{1+t}(1+t)} = \frac{-\varphi^2(t)}{2\sqrt{1+t}}$$

et que

$$t = \frac{1-\varphi^2(t)}{\varphi^2(t)}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\ell n(1+t)}{t\sqrt{1+t}} &= \frac{-2\,\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi^2(t) \cdot \frac{-2\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} \\ &= 4 \cdot \frac{\ell n\,\varphi(t)}{1-\varphi^2(t)} \cdot \varphi'(t) = g\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

où on a posé

$$\forall\, 0 < u < 1, \quad g(u) = 4 \cdot \frac{\ell n\, u}{1-u^2}.$$

D'après le Théorème de changement de variable, la fonction g est intégrable sur $]0, 1[$ et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^0 g(u)\,du$$

(attention à l'ordre des bornes, notre changement de variable est décroissant !) et donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 4\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} -u^{2k}\,\ell n\, u\,du.$$

Les fonctions $h_k(u) = -u^{2k}\,\ell n\, u$ sont continues et positives sur $]0, 1[$; elles sont évidemment intégrables et en intégrant par parties, on trouve que

$$\int_0^1 -u^{2k}\,\ell n\, u\,du = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

La série de fonctions $\sum h_k$ est donc une série de fonctions intégrables qui converge simplement sur $]0, 1[$ vers une fonction intégrable sur $]0, 1[$ et comme la série de terme général positif

$$\sum \int_0^1 |h_k(u)|\,du$$

est convergente, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

REMARQUE.— Ceux qui connaissant $\zeta(2)$ et les astuces associées en déduiront que l'intégrale est égale à $\pi/2$.