Mines Ponts MP - 503

1. Bien entendu, les deux sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont stables par A (quelle que soit la matrice A). Mais encore ?

La matrice A est diagonale par blocs :

$$A = \mathrm{Diag}(B, 1) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

donc il y a une droite et un plan stable évidents :

$$\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1) \quad \text{et} \quad [z = 0].$$

Mais encore ?

❧ Une droite $D = \mathbb{R} \cdot u$ dirigée par le vecteur $u \neq 0$ est stable par A si, et seulement si, le vecteur u est un vecteur propre de A.

Le polynôme caractéristique de B est égal à $X^2 + X + 1$, donc le polynôme caractéristique de A est égal à $(X - 1)(X^2 + X + 1)$. Comme A admet 1 pour seule valeur propre réelle, la seule droite propre est la droite $\mathbb{R} \cdot (0, 0, 1)$. Il n'y a donc pas d'autre droite stable par A que la droite déjà trouvée.

❧ Dans $\mathbb{R}^3$, un plan est en fait un hyperplan, donc représenté par une équation :

$$P = [{}^t CX = 0].$$

Ce plan est stable par la matrice A si, et seulement si,

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad {}^t CX = 0 \implies {}^t C(AX) = 0.$$

Cela signifie que le noyau de la forme linéaire (non nulle, puisque $\dim P = 2$)

$$\left[X \mapsto {}^t CX\right]$$

est contenu dans le noyau de la forme linéaire (peut-être nulle)

$$\left[X \mapsto {}^t CAX\right]$$

et donc qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad {}^t CAX = \alpha \cdot {}^t CX.$$

REMARQUE.— Si les deux formes linéaires sont non nulles, alors leurs noyaux sont de même dimension (des hyperplans de $\mathbb{R}^3$) et donc égaux. Dans ce cas, le scalaire α est non nul.

Si la forme linéaire $[X \mapsto {}^t CAX]$ est nulle, le scalaire α est nul.

Le vecteur X étant quelconque, on en déduit que

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad {}^t CA = \alpha \cdot {}^t C$$

c'est-à-dire que C est un vecteur propre de ${}^t A$.

❧ La matrice ${}^t A$ admet 1 pour seule valeur propre réelle et le sous-espace propre associé est dirigé par $(0, 0, 1)$, donc la matrice A admet un, et un seul, plan stable : il s'agit du plan d'équation

$$[0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0] = [z = 0].$$

En conclusion, il existe exactement quatre sous-espaces stables par A.

2. Comme les matrices A et M commutent, on sait que tout sous-espace propre de A est stable par M. Par conséquent, le vecteur $(0, 0, 1)$ est un vecteur propre de M donc la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ e & f & \star \end{pmatrix}.$$

En comparant

$$AM = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ e & f & \star \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ e-3f & e-2f & \star \end{pmatrix},$$

on obtient $e = f = 0$, donc la matrice M est diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

avec bien entendu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{B_0} \times B = B \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Je ne vois pas comment démontrer que M est diagonale par blocs comme A sans poser quelques calculs...

❧ Pour trouver les valeurs possibles des réels a, b, c et d, on peut continuer le calcul matriciel, c'est simple et assez rapide.

Mais on peut aussi réduire les calculs au strict minimum en remarquant que l'endomorphisme de P induit par restriction de A est un **endomorphisme cyclique** (dans une base bien choisie, il est représenté par une matrice compagnon et, de ce fait, les matrices qui commutent à cet endomorphisme sont les polynômes en cet endomorphisme).

Prenons un vecteur quelconque dans le plan $P = [z = 0]$ qui est stable par A, par exemple

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et calculons son image par A :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, appartiennent tous deux au plan P (le premier par choix, le second par stabilité de P) et forment donc une base du plan P.

Comme le plan P est stable par M, le vecteur MX appartient à P et il existe donc deux réels α et β tels que

$$MX = \alpha \cdot X + \beta \cdot AX.$$

Comme M et A commutent, on en déduit que

$$M(AX) = A(MX) = \alpha \cdot AX + \beta \cdot A(AX) = (\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)(AX).$$

Ainsi, les endomorphismes M et $(\alpha \cdot I_3 + \beta \cdot A)$ coïncident sur une base du plan $P = \text{Vect}(X, AX)$ et donc sur le plan P.

REMARQUE.— Cela revient à conclure que les matrices qui commutent à B sont exactement les polynômes en B (pour une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[B]$ est inférieure à 2 et les polynômes en B sont en fait les fonctions affines de B).

❧ Bref : les matrices M qui commutent à A sont les matrices de la forme

$$\text{Diag}(\alpha I_2 + \beta B, \gamma)$$

et forment donc un espace vectoriel de dimension 3 (les trois réels α, β et γ pouvant être arbitrairement choisis).